

УДК 621.396

## **Потенциальная точность оценок углов ориентации объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем**

**Перов А.И.\* , Днепров В.В.\*\***

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», (Московский энергетический институт), Красноказарменная улица, 14, Москва, 111250, Россия*

*\*e-mail: alexp@aha.ru*

*\*\*e-mail: vvdneprov@mail.ru*

### **Аннотация**

В статье рассмотрена потенциальная (в смысле нижней границы Рао-Крамера) точность оценок углов ориентации объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем. Приведены аналитические выражения и результаты их анализа для различных тактических ситуаций. Показано, что с увеличением числа точек приема уменьшается наиболее вероятное значение среднеквадратической ошибки оценки углов и сужается разброс ее возможных значений.

**Ключевые слова:** спутниковые радионавигационные системы, угловая ориентация объекта, нижняя граница Рао-Крамера.

### **Введение**

Спутниковые радионавигационные системы (СРНС) в настоящее время широко используются для решения различных технических задач, в том числе для определения углов ориентации объекта [1]. С этой целью радиосигналы от навигацион-

ных спутников (НС) принимаются в пространственно разнесенных точках, а информация об угловой ориентации объекта извлекается из фазовых набегов в приемных точках. В [1] приведен алгоритм определения угловой ориентации, использующий двухэтапную обработку. На первом этапе осуществляется оценка разности фаз сигналов, принимаемых в пространственно разнесенных точках, а на втором этапе из сформированных оценок разностей фаз извлекается информация об углах ориентации. В [2] описан алгоритм рекуррентного оценивания углов ориентации объекта при приеме сигналов в трех точках и одноэтапной обработке сигналов, при которой не осуществляется оценка параметров радиосигнала с последующим определением углов ориентации, а сразу в едином модуле реализуется алгоритм непосредственного определения углов ориентации. В приведенном алгоритме точность оценивания углов ориентации характеризуется матрицей дисперсий ошибок фильтрации углов ориентации, описываемой достаточно сложными уравнениями Риккати, что не позволяет достаточно быстро получать требуемые оценки точности. Кроме того, данный алгоритм ограничен приемом спутниковых сигналов в трех точках пространства, что не позволяет исследовать влияние увеличения числа приемных точек с целью повышения точности измерений. Целью данной статьи является получение общих соотношений для расчета потенциальной (в смысле нижней границы Рао-Крамера) точности оценки углов ориентации объекта по сигналам СРНС для произвольного числа и размещения точек приема.

## **Постановка задачи**

Рассмотрим геоцентрическую систему координат  $OXYZ$ , жестко связанную с Землей (рис. 1), и некоторый объект, с которым жестко свяжем систему координат (СК)  $O_cX_cY_cZ_c$  с центром  $O_c$ . На данном объекте заданы точки приема навигационных сигналов  $A_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , координаты которых фиксированы в СК  $O_cX_cY_cZ_c$ . Ориентация объекта в СК  $OXYZ$  определяется углами Эйлера  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  (крена, тангажа и рыскания соответственно) или в векторной форме  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T$ , которые определяются углами поворота СК  $O_cX_cY_cZ_c$  относительно СК  $OXYZ$ . В точках  $A_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  принимаются радиосигналы от  $n$  навигационных спутников ( $i = \overline{1, n}$ ).

Введем направляющие косинусы  $i$ -го НС, определив их, например, относительно точки  $O_c$ , и полагая их одинаковыми для всех других точек приема  $A_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  (что допустимо при малых расстояниях между точками приема по сравнению с расстояниями до НС).

$$\mu_{xi} = \frac{x_i - x_c}{R_i}, \quad \mu_{yi} = \frac{y_i - y_c}{R_i}, \quad \mu_{zi} = \frac{z_i - z_c}{R_i},$$

где  $x_{O_c}$ ,  $y_{O_c}$ ,  $z_{O_c}$  — координаты точки  $O_c$  в СК  $OXYZ$ ;  $R_i$  — дальность до  $i$ -го НС.

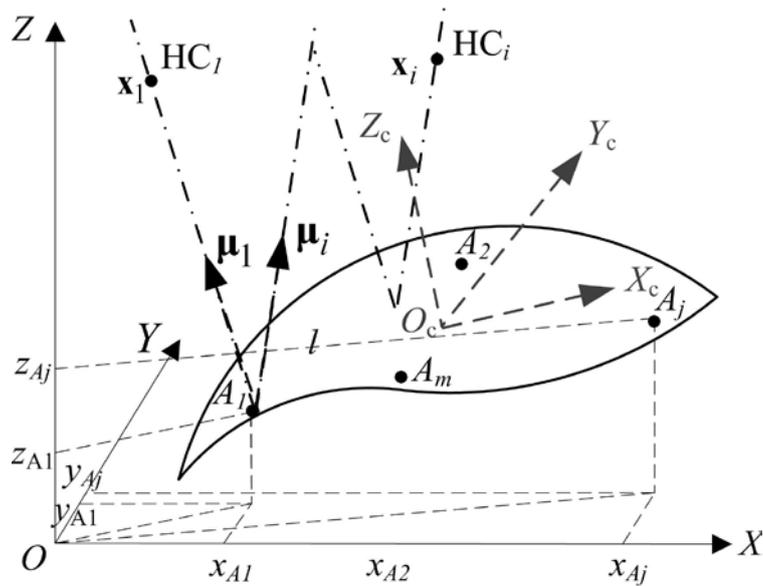


Рис. 1. Геоцентрическая система координат

Введем единичные векторы  $\boldsymbol{\mu}_{\text{HC},i} = \begin{bmatrix} \mu_{xi} & \mu_{yi} & \mu_{zi} \end{bmatrix}^T$ ,  $i = \overline{1, n}$  в СК  $OXYZ$  и единичные векторы  $\mathbf{l}_{A_j O_c}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , задающие направления точек  $A_j$  относительно точки  $O_c$  в СК  $O_c X_c Y_c Z_c$ .

Преобразуем единичные вектора  $\mathbf{l}_{A_j O_c}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , заданные в СК  $O_c X_c Y_c Z_c$  в вектора  $\mathbf{l}_{A_j O}$ , в СК  $OXYZ$

$$\mathbf{l}_{A_j O} = \mathbf{U}_c^3 \mathbf{l}_{A_j O_c}, \quad j = \overline{1, m},$$

где  $\mathbf{U}_c^3$  — матрица преобразования координат из СК  $O_c X_c Y_c Z_c$  в СК  $OXYZ$ , определяемая как

$$\mathbf{U}_c^3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_3) & -\sin(\alpha_3) & 0 \\ \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим спутниковый радиосигнал с кодовым разделением, приходящий от  $i$ -го НС в точку  $O_c$ , для которого запишем выражение

$$s_{0,dk}(t) = Ah_{dk,i}(t - \tau_{\theta}) \cos_{\Delta} \left( (\omega_0 + \omega_{НС})t + \pi \vartheta_{0,i} + \varphi_{0,i} \right),$$

где  $A$  — амплитуда;  $\omega_0$  — несущая частота сигнала;  $\omega_{д,i}$  — доплеровское смещение частоты, обусловленное движением точки  $O_c$  объекта относительно НС;  $\tau_{0,i}$  — задержка огибающей сигнала при его распространении от НС до приемника;  $\varphi_{0,i}$  — начальная фаза сигнала, принимаемого от  $i$ -го НС;  $h_{dk,i}(t)$  — дальномерный код сигнала;  $\vartheta_{НС,i}$  — навигационные данные, принимающие значение 0 или 1.

В точках  $A_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  принимаемые сигналы сдвинуты по фазе относительно аналогичных сигналов, принимаемых в точке  $O_c$ , на фазовые углы

$$\psi_{A_j,i}(\alpha) = \frac{2\pi L_{A_j O_c} \mathbf{\mu}_{НС,i}^T \mathbf{l}_{A_j O_c,3}(\alpha)}{\lambda}, \quad j = \overline{1, m},$$

где  $L_{A_j O_c}$  — расстояние между точкой  $O_c$  и точкой  $A_j$ .

Следовательно, можно записать

$$s_{A_j,dk}(t) = Ah_{dk,i}(t - \tau_{A_j, \theta}) \cos_{\Delta} \left( (\omega_0 + \omega_{НС})t + \pi \vartheta_{0,i} + \varphi_{0,i} + \psi_{A_j,i}(\alpha) + \omega_{A_j, \psi,i} t \right),$$

где  $\omega_{A_j, \psi,i}$  — доплеровское смещение частоты сигнала в точке  $A_j$ , обусловленное вращением объекта относительно точки  $O_c$ ;  $\tau_{A_j, \theta}$  — задержка огибающей сигнала от  $i$ -го НС в точке приема  $A_j$ .

Строго говоря, задержки  $\tau_{A_j, \theta}$  зависят от вектора углов  $\alpha$ . Однако учет этой зависимости слабо влияет на точность оценивания углов ориентации по фазе несущей частоты ( $\psi_{A_j,i}(\alpha)$ ). Поэтому в дальнейшем эта зависимость не учитывается.

При приеме  $n$  спутниковых радиосигналов суммарные сигналы на малых временных интервалах (например, равных периоду дальномерного кода) описываются выражениями

$$s_{A_j}(t) = \sum_{i=1}^n s_{A_j,i}(t) = \sum_{i=1}^n Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{A_j,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha}) + \omega_{A_j,\psi,i}t\right), j = \overline{1,m}.$$

Запишем уравнения наблюдений в точках  $A_j$ ,  $j = \overline{1,m}$

$$y_{A_j}(t) = s_{A_j}(t) + n_{A_j}(t),$$

где  $n_{A_j}(t)$ ,  $j = \overline{1,m}$  — независимые белые гауссовские шумы с равными двусторонними спектральными плотностями  $N_0/2$ .

Введем векторное наблюдение  $\mathbf{y}(t) = \left| y_{A_1}(t) \ \dots \ y_{A_m}(t) \right|^T$ , для которого запишем

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{s}(t) = \left| s_{A_1}(t) \ \dots \ s_{A_m}(t) \right|^T$ ,  $\mathbf{n}(t) = \left| n_{A_1}(t) \ \dots \ n_{A_m}(t) \right|^T$  — векторный белый гауссовский шум с матрицей двусторонних спектральных плотностей  $\mathbf{N}_0 = \mathbf{I}N_0/2$ .

Полагаем, что на интервале  $[0, T]$  проводятся векторные наблюдения (1), по которым оценивается вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  углов ориентации объекта. Ставится задача получения соотношений для нижней границы Рао-Крамера для матрицы дисперсий ошибок оценки вектора углов ориентации  $\boldsymbol{\alpha}$  при следующих допущениях:

задержки  $\tau_{A_j,i}$ , доплеровские смещения частот  $\omega_{д,i}$  и  $\omega_{A_j,\psi,i}$ ,  $i = \overline{1,n}$  полагаются известными;

начальные фазы  $\varphi_{0,i}$ ,  $i = \overline{1,n}$  полагаются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале  $[-\pi, \pi]$ ;

навигационные данные  $\vartheta_{НС,i}$  представляют собой случайные величины, принимающие значение 0 или 1 с равными вероятностями.

### Общие соотношения для потенциальной точности оценки углов ориентации

В рассматриваемой задаче параметры  $\varphi_{0,i}$  и  $\vartheta_{НС,i}$  являются неинформативными случайными величинами. Так как при изменении значения  $\vartheta_{НС,i}$  фаза сигнала меняется на  $\pi$ , то для дальнейшего рассмотрения введем неинформативную суммарную фазу  $\tilde{\varphi}_{0,НС,i} = \vartheta_{НС,i} \pi + \varphi_{0,i}$ , которая является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Рассмотрим усредненную по всем  $\tilde{\varphi}_{0,i}$ ,  $i = \overline{1,n}$  функцию правдоподобия

$$p(\mathbf{Y}_0^T | \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}(\mathbf{Y}_0^T | \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\varphi}_{0,i}, i = \overline{1,n}) d\tilde{\varphi}_{0,1} \dots d\tilde{\varphi}_{0,n} =$$

$$= c \prod_{i=1}^n I_0(X_i(\boldsymbol{\alpha})),$$

где  $\mathbf{Y}_0^T = \{\mathbf{y}(t), t \in [0, T]\}$  — вектор реализаций наблюдений;  $I_0(x)$  — функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента;

$$X_i^2(\boldsymbol{\alpha}) = X_{c,i}^2(\boldsymbol{\alpha}) + X_{s,i}^2(\boldsymbol{\alpha}), \quad (2)$$

$$X_{c,i}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^m \frac{2A}{N_0} \int_0^T y_{A_j}(t) h_i(t - \tau_{A_j,i}) \cos\left(\left(\omega_c + \omega_i + \omega_{A_j} \psi_i\right)t + \psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) dt,$$

$$X_{s,i}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^m \frac{2A}{N_0} \int_0^T y_{A_j}(t) h_i(t - \tau_{A_j,i}) \sin\left(\left(\omega_c + \omega_i + \omega_{A_j} \psi_i\right)t + \psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) dt. \quad (3)$$

Используя тригонометрические преобразования, представим (3) в виде

$$X_{c,i}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^m \left( I_{j,i} \cos\left(\psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) - Q_{j,i} \sin\left(\psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) \right),$$

$$X_{s,i}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^m \left( Q_{j,i} \cos\left(\psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) + I_{j,i} \sin\left(\psi_{A_j,i}(\boldsymbol{\alpha})\right) \right),$$

где  $I_{j,i}$ ,  $Q_{j,i}$  – синфазная и квадратурная компоненты коррелятора

$$I_{j,i} = \frac{2A}{N_0} \int_0^T y_{A_j}(t) h_i(t - \tau_{A_j,i}) \cos\left(\left(\omega_c + \omega_i + \omega_{A_j} \psi_i\right)t\right) dt,$$

$$Q_{j,i} = \frac{2A}{N_0} \int_0^T y_{A_j}(t) h_i(t - \tau_{A_j,i}) \sin\left(\left(\omega_c + \omega_i + \omega_{A_j} \psi_i\right)t\right) dt. \quad (4)$$

Нижняя граница Рао-Крамера для ковариационной матрицы  $\mathbf{D}_{\text{пот } \boldsymbol{\alpha}}$  ошибок оценки вектора углов ориентации  $\boldsymbol{\alpha}$  определяется выражением [3]

$$\mathbf{D}_{\text{пот } \boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{J}^{-1}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{J}$  – информационная матрица Фишера [3]

$$\mathbf{J} = M \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \left( \frac{\partial \ln(p(\mathbf{Y}^T | \boldsymbol{\alpha}))}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right)^T \right], \quad (6)$$

где производная скаляра по вектору  $\mathbf{a}$  понимается как вектор-столбец [3].

Отметим, что в (6) сначала необходимо вычислить производные по вектору  $\mathbf{a}$ , а потом выполнить математическое усреднение.

Рассмотрим производную натурального логарифма (8) по  $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial \ln \left( p \left( \mathbf{Y}^T | \right) \right)}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n \frac{I_1(X_i(\mathbf{a}))}{I_0(X_i(\mathbf{a}))} \frac{\partial X_i(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}, \quad (7)$$

где  $I_1(x)$  — функции Бесселя первого порядка от мнимого аргумента.

При стандартном отношении сигнал/шум, соответствующему Интерфейсному контрольному документу  $\frac{I_1(X_i(\mathbf{a}))}{I_0(X_i(\mathbf{a}))} \approx 1$  [1]. Поэтому (7) принимает вид

$$\frac{\partial \ln \left( p \left( \mathbf{Y}^T | \right) \right)}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}. \quad (8)$$

С учетом (8), запишем (6) в виде

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n M \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left( \frac{\partial X_i(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \right]. \quad (9)$$

Так как  $X_i$  определяется через синфазную и квадратурную компоненты  $I_{j,i}$ ,  $Q_{j,i}$ , то для выполнения усреднения в (9) необходимо располагать математическими ожиданиями  $I_{j,i}$  и  $Q_{j,i}$ . Поэтому выполним усреднение в (4)

$$\begin{aligned} M \left[ I_{j,i} \right] &= 2q_{c/n_0} T \cos \left( \varphi_{0,i} + \psi_{A_j,i}(\mathbf{a}) \right), \\ M \left[ Q_{j,i} \right] &= -2q_{c/n_0} T \sin \left( \varphi_{0,i} + \psi_{A_j,i}(\mathbf{a}) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $q_{c/n_0} = P_s/N_0$  — отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности внутреннего шума.

С учетом (10) и соотношений (2), (3) рассчитываем  $M[X_i] = 2q_{c/n_0} T m$ .

Выполнив в (9) дифференцирование по  $\alpha$  и усредняя полученный результат по реализациям шумов с учетом (10), запишем выражения для элементов матрицы  $\mathbf{J}$

$$J_{\nu,\gamma} = -2q_{c/n_0} T \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \psi_{A_j,i}(\alpha)}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial \psi_{A_j,i}(\alpha)}{\partial \alpha_\gamma} \right) - \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_{A_j,i}(\alpha)}{\partial \alpha_\nu} \right) \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_{A_j,i}(\alpha)}{\partial \alpha_\gamma} \right) \right], \quad (11)$$

где  $\nu = \overline{1,3}$ ,  $\gamma = \overline{1,3}$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{A_j,i}(\alpha)}{\partial \alpha_\nu} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left( \frac{2\pi L_{A_j} \sigma_c \mathbf{u}_{\text{НС},i}^T (\mathbf{U}_c^3(\alpha) \mathbf{I}_{A_j, c,c})}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{2\pi L_{A_j} \sigma_c}{\lambda} \mathbf{u}_{\text{НС},i}^T \left( \frac{\partial \mathbf{U}_c^3(\alpha)}{\partial \alpha_\nu} \mathbf{I}_{A_j, c,c} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{U}_c^3(\alpha)}{\partial \alpha_1} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_3) & -\sin(\alpha_3) & 0 \\ \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_1) & -\cos(\alpha_1) \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_c^3(\alpha)}{\partial \alpha_2} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_3) & -\sin(\alpha_3) & 0 \\ \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\alpha_2) & 0 & -\sin(\alpha_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{vmatrix}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{a}}^3(\cdot)}{\partial \alpha_3} = \begin{vmatrix} -\sin(\alpha_3) & -\cos(\alpha_3) & 0 \\ \cos(\alpha_3) & -\sin(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(\alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим частный случай, когда расстояния  $L_{A_j O_c}$ , от точки  $O_c$  до всех точек приема  $A_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  одинаковы и равны  $l$ . Тогда (11) может быть записано в виде

$$J_{\nu, \gamma} = -2q_{c/n_0} T \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 \times \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\gamma} \right) - \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\nu} \right) \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\gamma} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\nu} = \boldsymbol{\mu}_{\text{НС}, i}^T \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{a}}^3(\cdot)}{\partial \alpha_\nu} \mathbf{1}_{A_j \text{ c, c}} \right).$$

Из (13) следует, что элементы  $J_{\nu, \gamma}$  информационной матрицы Фишера содержат одинаковый множитель  $2q_{c/n_0} T \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2$ , т.е. можно записать

$$\mathbf{J} = 2q_{c/n_0} T \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 \tilde{\mathbf{J}}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\mathbf{J}} = - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\gamma} \right) - \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\nu} \right) \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{\psi}_{A_j, i}(\mathbf{a})}{\partial \alpha_\gamma} \right) \right].$$

Подставляя (14) в (5) запишем

$$\mathbf{D}_{\text{пот } \alpha} = \frac{-1}{2q_{c/n_0} T \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2} \tilde{\mathbf{J}}^{-1}. \quad (15)$$

Из (15) следуют известные положения о том, что потенциальная точность оценки угла ориентации тем выше, чем больше отношение сигнал/шум  $q_{c/n_0} T$  и чем больше отношение  $l/\lambda$ , которое характеризует отношение некоторого характерного линейного размера  $l$  приемной системы к длине волны принимаемого навигационного сигнала. Из (15) также следует, что потенциальная точность оценки углов ориентации объекта по сигналам НС зависит от пространственных углов между линиями, соединяющими приемные точки, и направлениями прихода навигационных сигналов, от числа  $n$  обрабатываемых сигналов НС и числа  $m$  приемных точек.

### **Результаты анализа потенциальной точности оценки углов ориентации**

Для анализа полученных выражений (5), (11) воспользуемся следующей методикой.

Пусть значения вектора углов ориентации  $\alpha$  являются независимыми случайными величинами, принимающими значения из некоторого заданного диапазона, например,  $\alpha_1 \in [-30^\circ, 30^\circ]$ ,  $\alpha_2 \in [-20^\circ, 20^\circ]$ ,  $\alpha_3 \in [0^\circ, 360^\circ]$ . Расположение навигационных спутников относительно объекта также полагаем случайным с равномерным законом распределения в верхней полусфере. Будем интересоваться гистограммой распределения значений среднеквадратических ошибок (СКО) оценок составляющих вектора угловой ориентации  $D_{\text{пот } \alpha_1, \alpha_1}$ ,  $D_{\text{пот } \alpha_2, \alpha_2}$ ,  $D_{\text{пот } \alpha_3, \alpha_3}$  (5).

Положим  $q_{c/n_0}$ , выраженное в децибелах  $\tilde{q}_{c/n_0} = 45$  дБГц,  $T = 5$  мс,  $\lambda = c/f_0$ ,  $f_0 = 1575,42$  Гц. Рассмотрим 3 точки приема, расположенные в плоскости  $O_c X_c Y_c$  и лежащие в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса  $R = 1$  м с центром в точке  $O_c$ .

На рис. 2—4 приведены гистограммы распределения значений СКО оценки различных углов, рассчитанные при приеме  $n = 4$  сигналов НС.

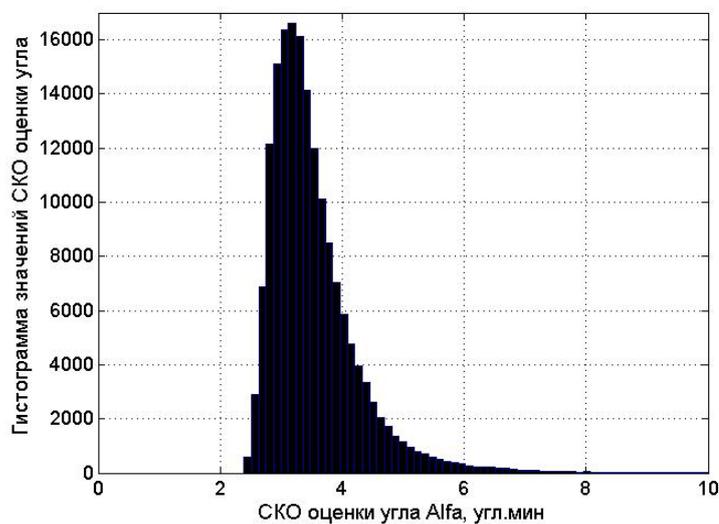


Рис. 2. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$  при  $m = 3$  и  $n = 4$

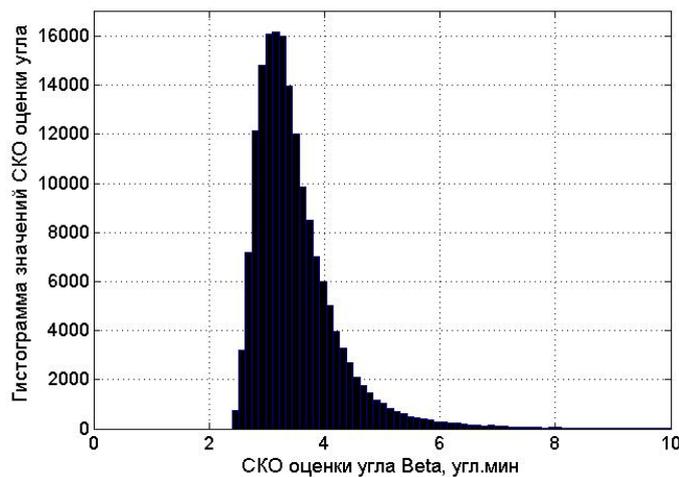


Рис. 3. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_2$  при  $m = 3$  и  $n = 4$

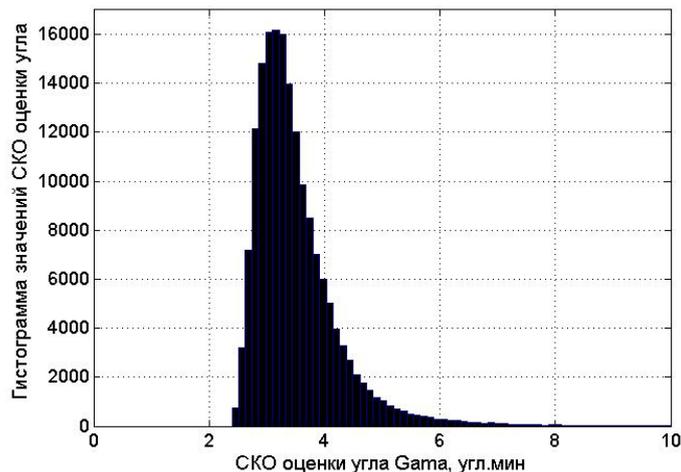


Рис. 4. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_3$  при  $m = 3$   $n = 4$

Из рис. 2—4 видно, что гистограммы распределений для различных составов вектора угловой ориентации достаточно близки между собой. Поэтому будем говорить только об одной составляющей, например  $\alpha_1$ . Наиболее вероятное значение СКО оценки угла составляет  $\sigma_\alpha = 3,15$  угл. мин., среднеквадратическое значение разброса значений  $\sim 1$  угл. мин.

Рассмотрим влияние числа принимаемых и обрабатываемых сигналов навигационных спутников на гистограмму распределения СКО оценки угла. На рис. 5—6 приведены гистограммы распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$ , рассчитанные при  $n = 10$  и  $n = 24$  при приеме сигналов в тех же трех точках.

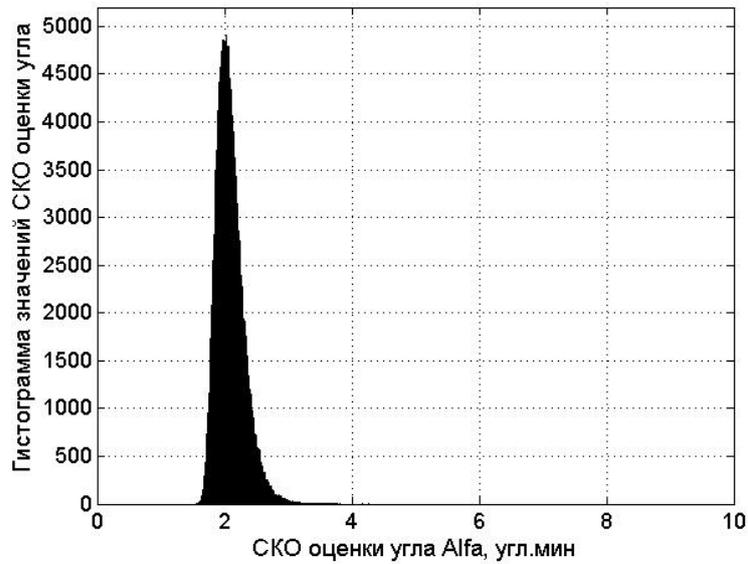


Рис. 5. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$   
при  $n = 10$  и  $m = 3$

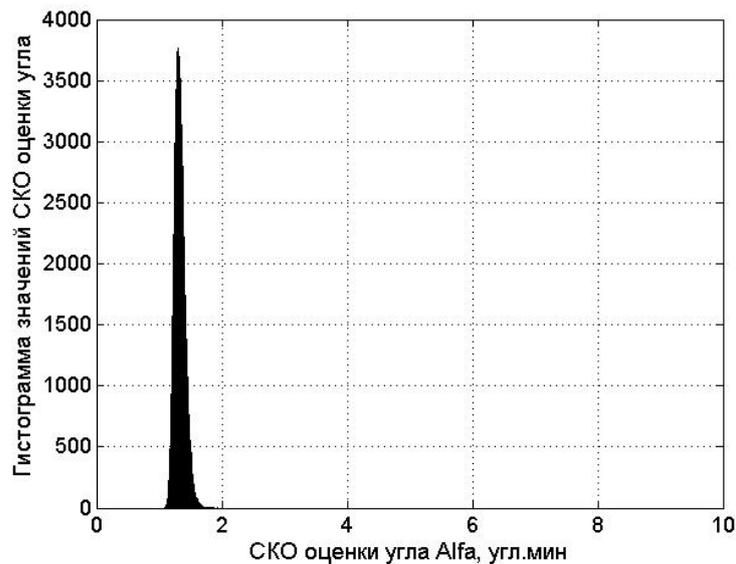


Рис. 6. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$   
при  $n = 24$  и  $m = 3$

Из приведенных гистограмм следует, что с увеличением числа обрабатываемых сигналов НС уменьшается наиболее вероятное значение СКО оценки угла ( $\sigma_\alpha = 3,15$  угл. мин. для  $n = 4$ ;  $\sigma_\alpha = 2$  угл. мин. для  $n = 10$ ;  $\sigma_\alpha = 1,3$  угл. мин. для  $n = 24$ ) и сужается разброс возможных значений СКО оценки угла.

Рассмотрим влияние числа точек приема на гистограмму распределения СКО оценки угла. Положим число НС  $n = 10$ , а число точек приема сигналов НС  $m = 4$  или  $m = 6$ . При этом в обоих случаях точки приема расположены в плоскости  $O_c X_c Y_c$ , и при 4 точках приема они размещаются в вершинах квадрата, а при 6 точках приема они размещаются в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса  $R = 1$  м с центром в точке  $O_c$ .

На рис. 9—10 приведены гистограммы распределения значений СКО оценки угла  $\alpha$ , рассчитанные при  $m = 4$  и  $m = 6$ .

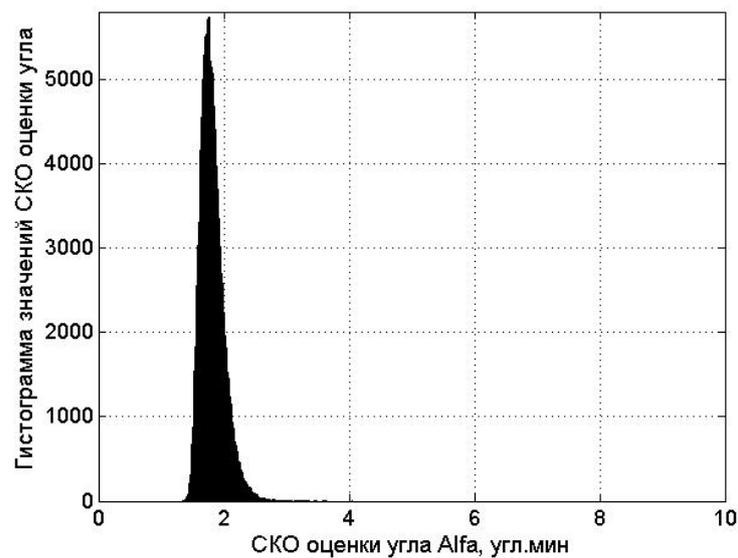


Рис. 9. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$

при  $m = 4$ ,  $n = 10$

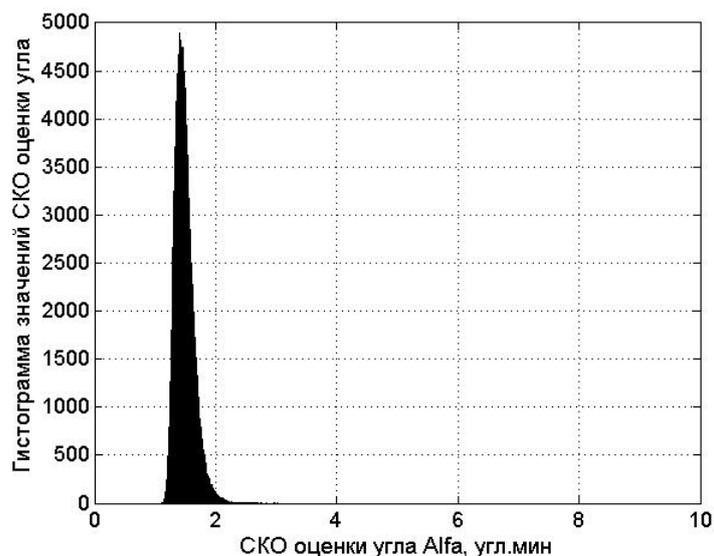


Рис. 10. Гистограмма распределения значений СКО оценки угла  $\alpha_1$

при  $m = 6$ ,  $n = 10$

Из приведенных гистограмм следует, что с увеличением числа точек приема уменьшается наиболее вероятное значение СКО оценки угла ( $\sigma_\alpha = 2$  угл.мин для  $m = 3$  и  $n = 10$ ;  $\sigma_\alpha = 1,7$  угл.мин для  $m = 4$  и  $n = 10$ ;  $\sigma_\alpha = 1,4$  угл.мин для  $m = 6$  и  $n = 10$ ) и сужается разброс возможных значений СКО оценки угла .

### Выводы

Получены соотношения для расчета нижней границы Рао-Крамера для матрицы дисперсий ошибок оценки углов ориентации объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем при произвольном числе точек приема и произвольном числе навигационных сигналов. На примерах приема до 24 сигналов НС в трех, четырех или шести точках показано, что с увеличением числа точек приема, уменьшается наиболее вероятное значение СКО оценки углов и сужается разброс возможных значений СКО оценки углов. Среднеквадратическое значение ошибки оценки угла

ориентации составляет ~ 1,5 угл. мин. при использовании 6 точек приема с максимальной базой 2 м и обработке сигналов 10 навигационных спутников.

### **Библиографический список**

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. Издание 4-е./ Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. – М.: Радиотехника, 2010. 800 с.

2. Перов А.И. Одноэтапный когерентно-некогерентный алгоритм определения угловой ориентации объекта по сигналам спутниковой радионавигационной системы // Радиотехника. 2014. № 9. С. 97-105.

3. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003. 400 с.