

# Лекция 4.

## Обнаружение сигналов

Постановка задачи обнаружения.

Наблюдается реализация  $y(t)$  на интервале  $[0, T]$  ( $\mathbf{Y}_0^T$ ):

$$y(t) = \begin{cases} S(t, \lambda) + n(t), & \text{если сигнал присутствует,} \\ n(t), & \text{если сигнал отсутствует.} \end{cases}$$

$$y(t) = \vartheta S(t, \lambda) + n(t), \quad t \in [0, T] \quad \text{или} \quad \vartheta = \{0, 1\},$$
$$P(\vartheta = 1) = P_{ap} (1)$$

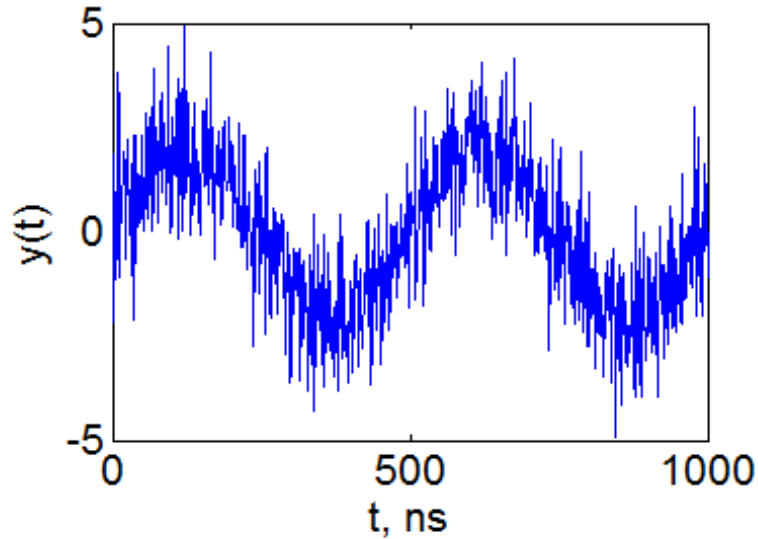
Требуется оценить  $\vartheta$

# Зачем это нужно

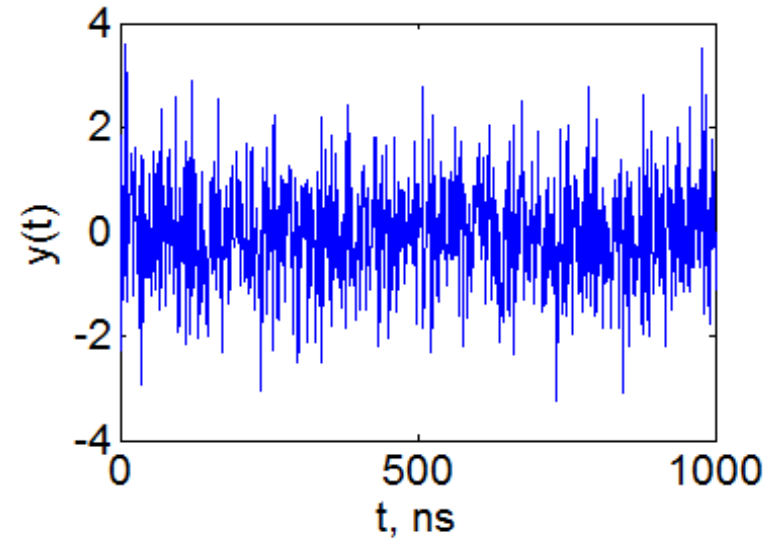
Примеры: радиовещание

СРНС

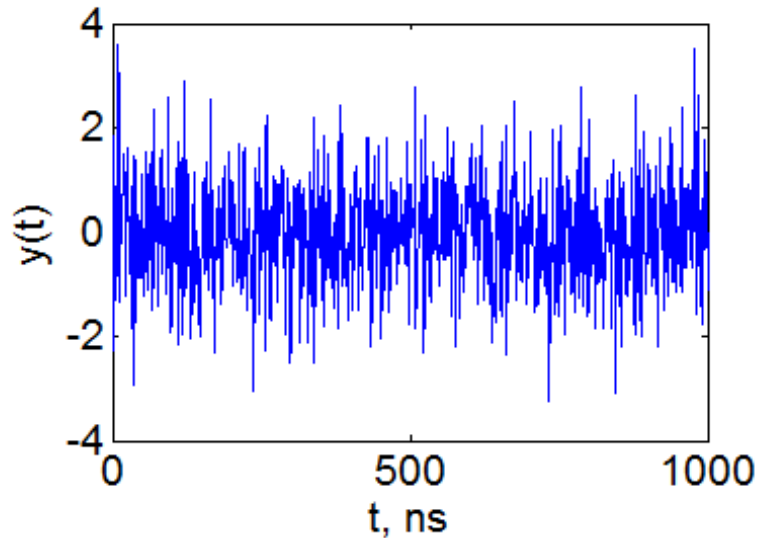
Сигнал ЕСТЬ



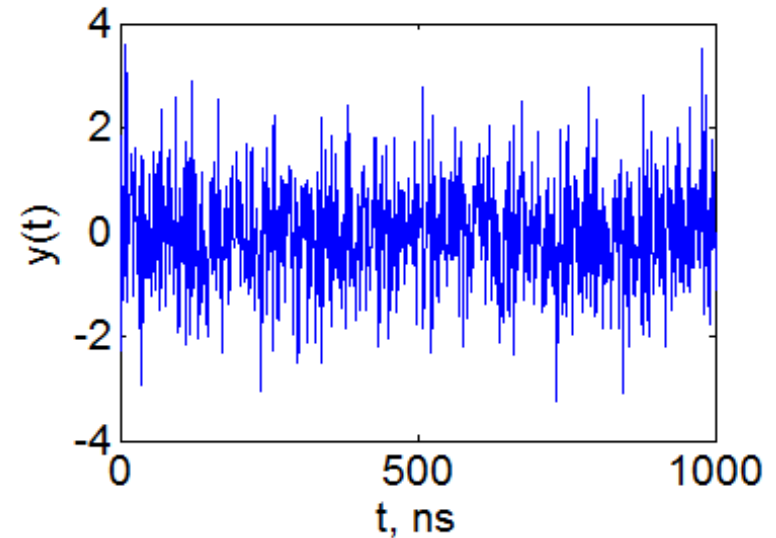
Сигнал ЕСТЬ



Сигнала НЕТ



Сигнала НЕТ



# Обнаружение детерминированного сигнала

Байесовское решение. Простая функция потерь:

Истинное значение $\vartheta$	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c(\vartheta, \hat{\vartheta})$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Средний риск:

$$r(\mathbf{u}, t) = \iint c(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{Y}_0^T)) p(\mathbf{x}(t), \mathbf{Y}_0^T) d\mathbf{x}(t) d\mathbf{Y}_0^T =$$

$$= \iint c(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{Y}_0^T)) p(\mathbf{x}(t) | \mathbf{Y}_0^T) d\mathbf{x}(t) p(\mathbf{Y}_0^T) d\mathbf{Y}_0^T$$

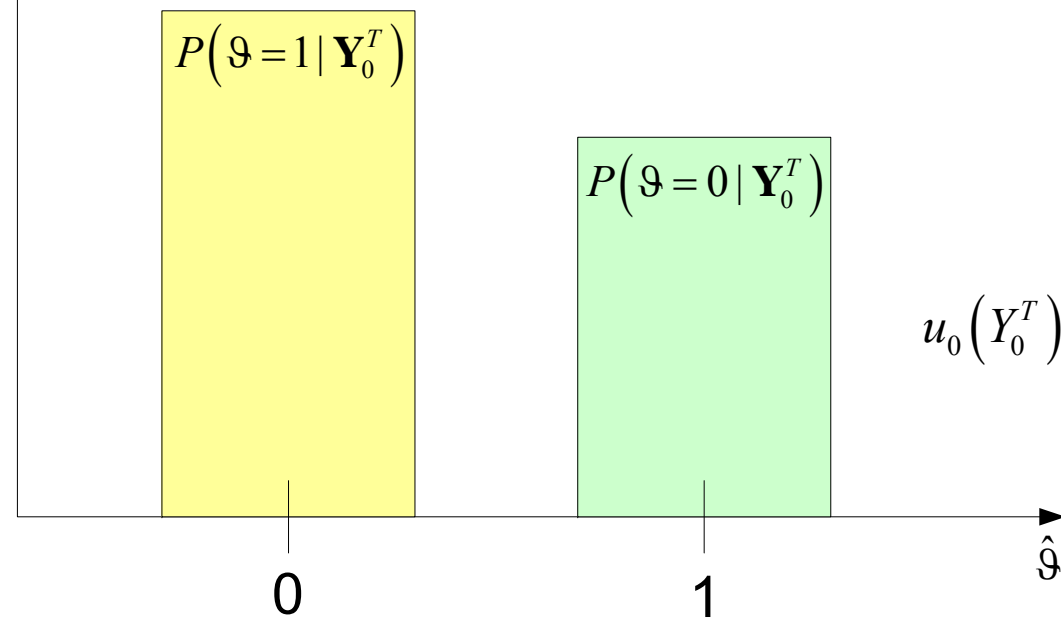
$$\Leftrightarrow r(\mathbf{u} \equiv \hat{\vartheta}) = \int \left( \sum_{\vartheta=0}^1 c(\vartheta, \hat{\vartheta}) P(\vartheta | \mathbf{Y}_0^T) \right) p(\mathbf{Y}_0^T) d\mathbf{Y}_0^T \rightarrow \min$$

# Обнаружение детерминированного сигнала

Оценка  $\hat{\vartheta}$  такая что:  $r_{ps}(\hat{\vartheta}, \mathbf{Y}_0^T) = \left( \sum_{\vartheta=0}^1 c(\vartheta, \hat{\vartheta}) P(\vartheta | \mathbf{Y}_0^T) \right) \rightarrow \min,$

т.е.  $\hat{\vartheta} = \arg \min \left( \sum_{\vartheta=0}^1 c(\vartheta, \hat{\vartheta}) P(\vartheta | \mathbf{Y}_0^T) \right)$

$$r_{ps}(\hat{\vartheta} | \mathbf{Y}_0^T) = \left( \sum_{\vartheta=0}^1 c(\vartheta, \hat{\vartheta}) P(\vartheta | \mathbf{Y}_0^T) \right) = P(\vartheta \neq \hat{\vartheta} | \mathbf{Y}_0^T)$$



Решающее правило:

$$u_0(\mathbf{Y}_0^T) = \begin{cases} \hat{\vartheta}=1, & \text{при } P(\vartheta=1 | \mathbf{Y}_0^T) \geq P(\vartheta=0 | \mathbf{Y}_0^T), \\ \hat{\vartheta}=0, & \text{при } P(\vartheta=1 | \mathbf{Y}_0^T) < P(\vartheta=0 | \mathbf{Y}_0^T). \end{cases}$$

# Как из решающего правила получается алгоритм обработки

По формуле Байеса

$$P(\vartheta | \mathbf{Y}_0^T) = k P_{ap}(\vartheta) P(\mathbf{Y}_0^T | \vartheta) \quad (k = 1 / P(\mathbf{Y}_0^T) = const)$$

Если  $\frac{P(\mathbf{Y}_0^T | \vartheta = 1)}{P(\mathbf{Y}_0^T | \vartheta = 0)} \geq \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$ , то  $\hat{\vartheta} = 1$

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \frac{P(\mathbf{Y}_0^T | \vartheta = 1)}{P(\mathbf{Y}_0^T | \vartheta = 0)} \quad - \text{отношение правдоподобия}$$

$$h = \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)} \quad - \text{порог сравнения}$$

# Отношение правдоподобия

Рассмотрим дискретный сигнал:  $y_k = S_k(\lambda) + n_k$ ,  $k = \overline{1, m}$

$$p(\mathbf{Y}_1^m | S_k(\lambda), k = \overline{1, m}) = p(y_1 | S_1(\lambda)) \cdot p(y_2 | S_2(\lambda)) \cdots p(y_m | S_m(\lambda))$$

$$p(y_k | S_k(\lambda)) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(y_k - S_k(\lambda))^2\right\}$$

$$p(y_1, y_2, \dots, y_m | S_k(\lambda), k = \overline{1, m}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m (y_k - S_k(\lambda))^2\right\} \Rightarrow$$

$$\rho(\mathbf{Y}_1^m) = \frac{p(\mathbf{Y}_1^m | S_k(\lambda), k = \overline{1, m})}{p(\mathbf{Y}_1^m | 0, k = \overline{1, m})} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m (y_k - S_k(\lambda))^2\right\} / \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m y_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m S_k(\lambda) \left(y_k - \frac{1}{2} S_k(\lambda)\right)\right\}$$

# Отношение правдоподобия

Отношение правдоподобия для непрерывного времени:

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left( y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right) dt \right\}$$

Отношение правдоподобия для векторных сигналов и сообщений:

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \exp \left\{ \int_0^T \mathbf{S}^T(t, \lambda) 2\mathbf{N}_n^{-1} \left( \mathbf{y}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{S}(t, \lambda) \right) dt \right\}$$

# Алгоритм обработки сигнала

$$\hat{\mathfrak{G}} = \left\{ \rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq h \right\}$$

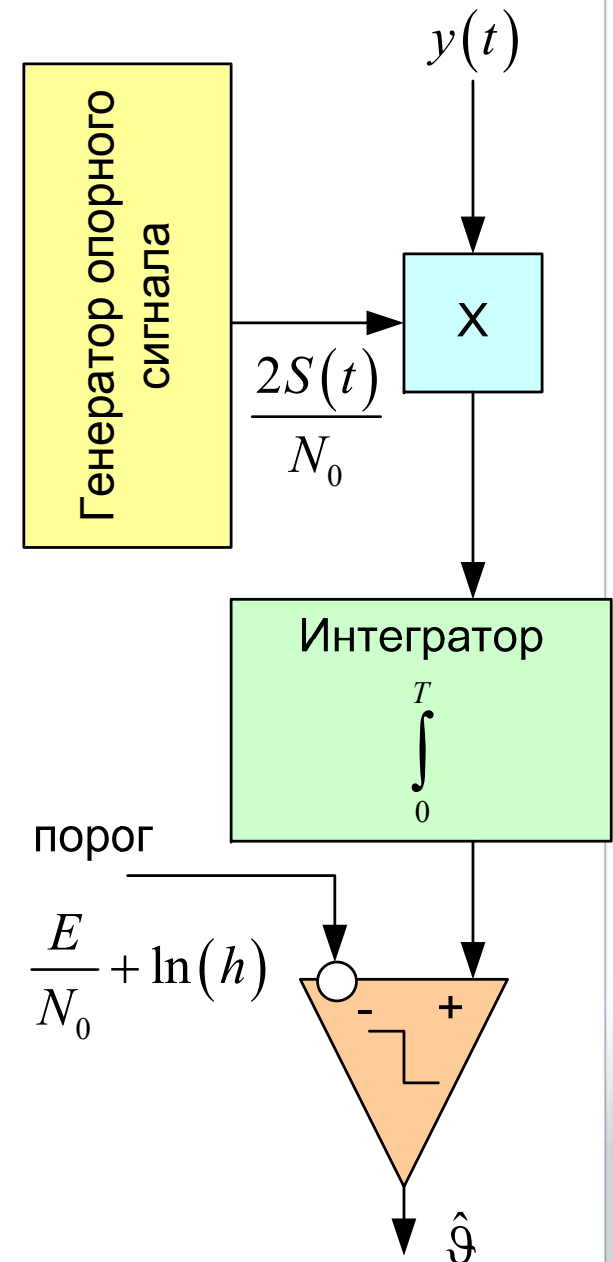
$$\exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left( y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right) dt \right\} \geq h$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left( y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right) dt \geq \ln(h)$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) y(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t, \lambda) dt \geq \ln(h),$$

$$\int_0^T S^2(t, \lambda) dt = E - \text{энергия сигнала}$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) y(t) dt \geq \ln(h) + \frac{E}{N_0}$$





# Критерий Неймана-Пирсона

Истинное значение $\mathcal{D}$	Оценка $\hat{\mathcal{D}}$	Функция потерь $c(\mathcal{D}, \hat{\mathcal{D}})$
0	0	0
0	1	$c_{01}$
1	0	$c_{10}$
1	1	0

- ложная тревога

- пропуск сигнала

По критерию Неймана-Пирсона оптимальным решением считается такое, которое обеспечивает максимум вероятности правильного обнаружения (или, что тоже самое, минимум вероятности пропуска сигнала) при заданной вероятности ложной тревоги.

Решающее правило отличается только значением порога:

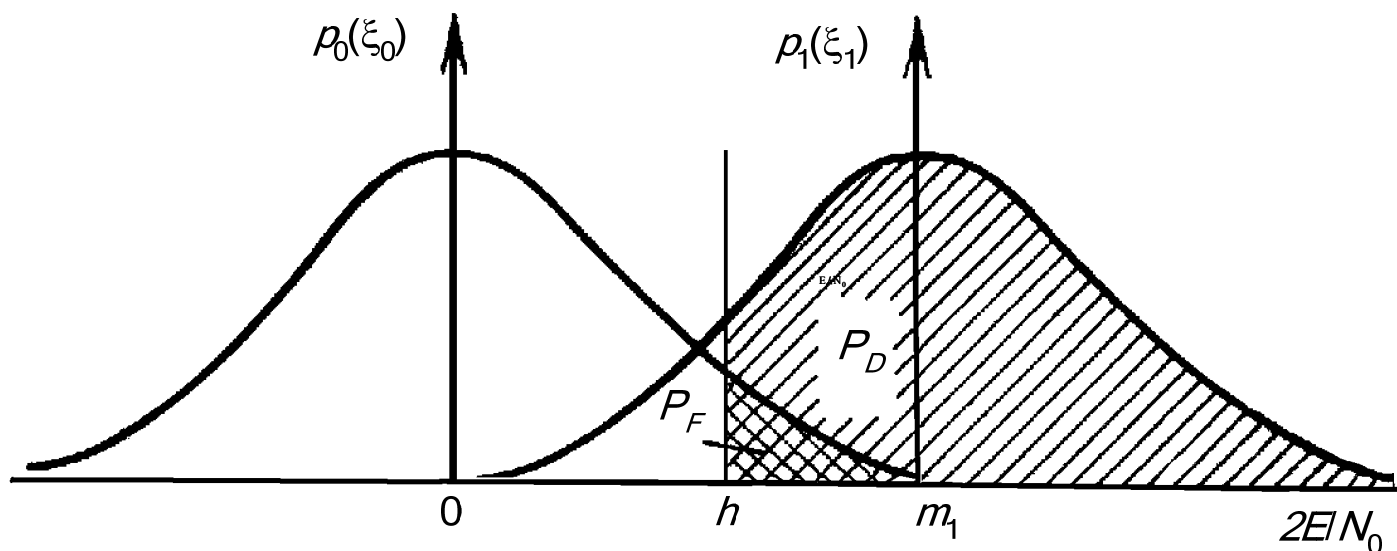
$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ \rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq \tilde{h} \right\}$$

# Критерий Неймана-Пирсона

Порог обнаружения выбирается исходя из условия:

$$P\left(\rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq \tilde{h} \mid \vartheta = 0\right) = P_{F_{\text{доп}}}$$

$P_{F_{\text{доп}}}$  – вероятность ложной тревоги (задана)



# Характеристики обнаружения сигналов

Вероятность правильного обнаружения –  $P_D$

Вероятность ложной тревоги -  $P_F$

Сигнал на выходе оптимального приемника:

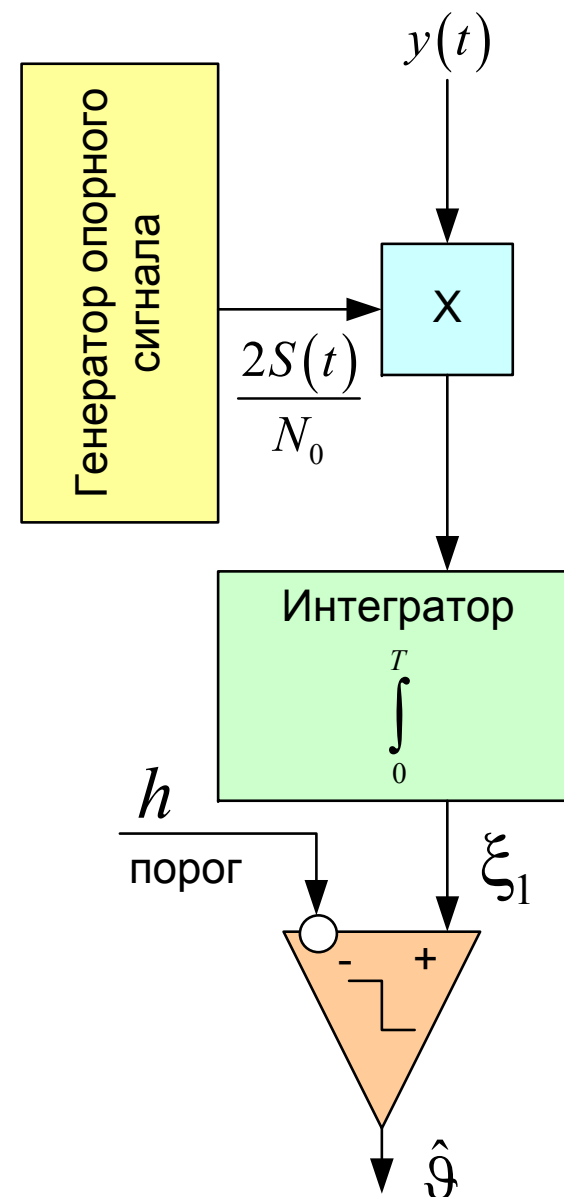
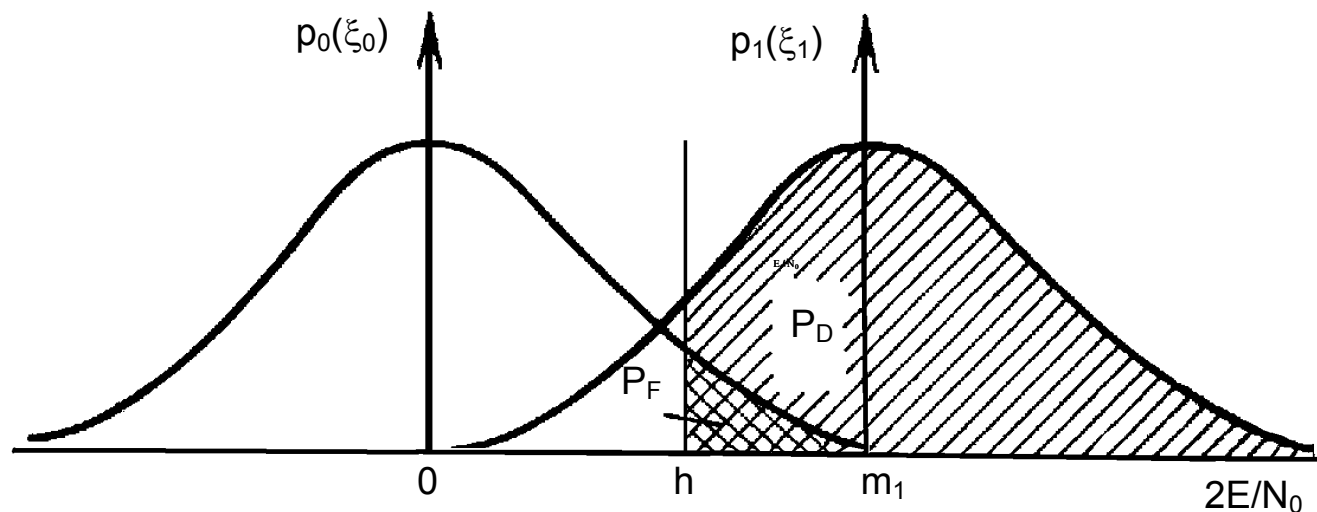
$$\xi_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(\tau) S(\tau) d\tau = \frac{2}{N_0} \int_0^T (S(\tau) + n(\tau)) S(\tau) d\tau$$

# Характеристики обнаружения

$$m_1 = M[\xi_1] = M\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(\tau)S(\tau)d\tau\right] = M\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T (S(\tau) + n(\tau))S(\tau)d\tau\right] = \frac{2E}{N_0}$$

$$D_1 = M[(\xi_1 - m_1)^2] = M\left[\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T n(\tau)S(\tau)d\tau\right)^2\right] = \frac{2E}{N_0}$$

Гауссовские ПВ при наличии и отсутствии сигнала



# Характеристики обнаружения

$$P_F = \int_h^{\infty} p_0(\xi) d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}}\right)$$

$$P_D = \int_h^{\infty} p_1(\xi) d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

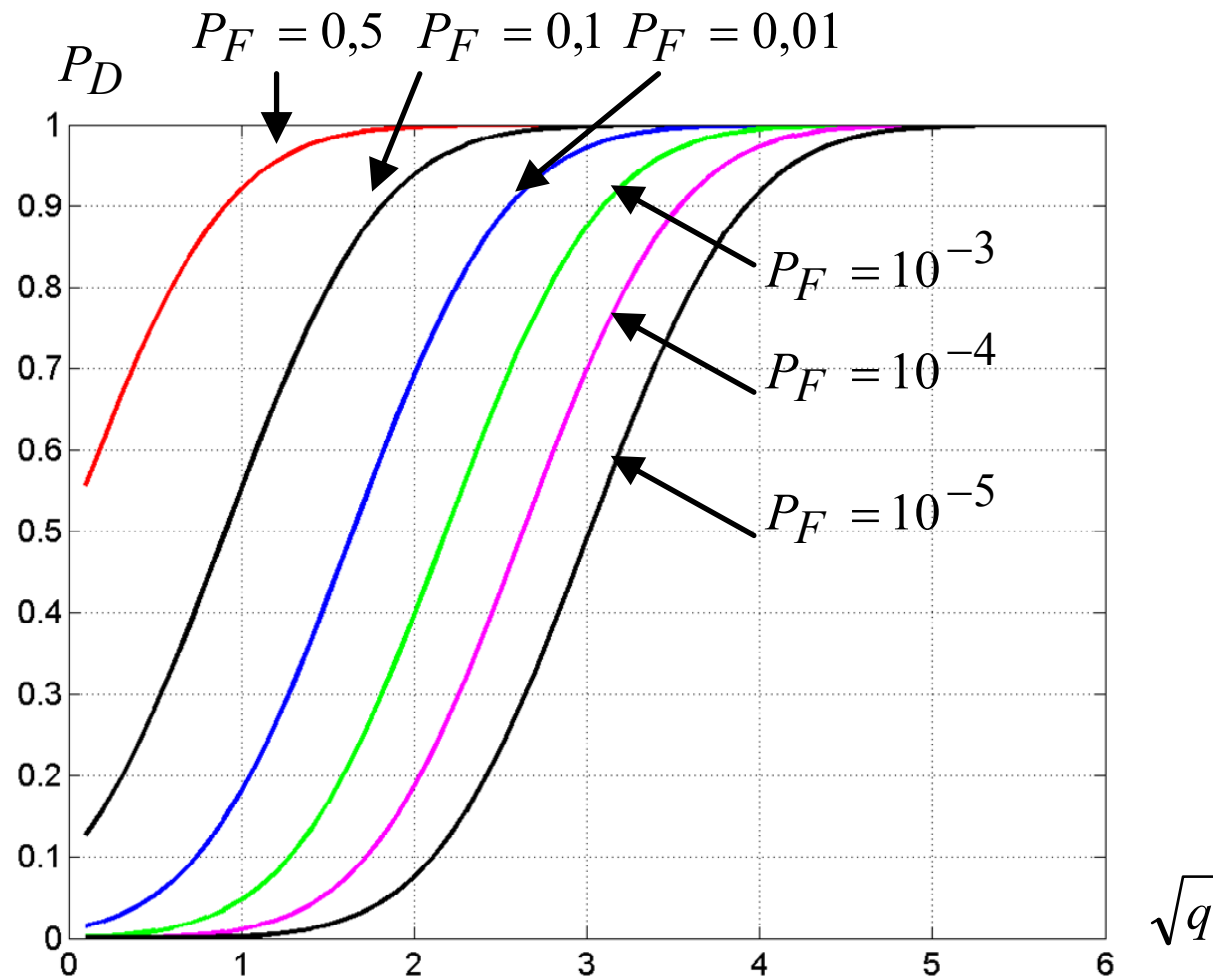
где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  - интеграл вероятности

$h$  - порог сравнения

$E$  - энергия сигнала

$N_0$  - спектральная плотность шума

# Кривые обнаружения детерминированного сигнала



$$q = E / N_0$$

# Обнаружение сигнала со случайными параметрами

Наблюдается реализация

$$y(t) = \mathfrak{A}S(t, \mu) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$\mu$  – случайные неинформативные параметры сигнала с априорной плотностью вероятностей  $p_{ap}(\mu)$ .

По свойству согласованности ПВ

$$p(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G}) = \int P(\mathbf{Y}_0^T, \mu | \mathcal{G}) d\mu = \int P(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G}, \mu) p_{ap}(\mu) d\mu$$

# Отношение правдоподобия

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \frac{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G} = 1)}{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G} = 0)} = \frac{\int P(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G} = 1, \mu) p_{ap}(\mu) d\mu}{P(\mathbf{Y}_0^T | \mathcal{G} = 0)} = \int \rho(\mathbf{Y}_0^T | \mu) p_{ap}(\mu) d\mu$$

(необходимо усреднить отношение правдоподобия по случайным параметрам)

Байесовское решение при простой функции потерь:

$$\hat{\mathcal{G}} = \left\{ \rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq h \right\} \quad h = \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$$

Общий вид сигнала в радиотехнике:

$$S(t, \lambda, \mu) = aA(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0)$$



# Практический пример: Обнаружение сигнала с неизвестной фазой и амплитудой по дискретной выборке

Входная  
выборка:

$$y_k = a \cdot A(kT - \tau_k) \cos\left(\left(\omega_0 + \omega_d\right)kT + \varphi_0\right) + n_k,$$

$$k = \overline{1, m}$$

$$p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \text{-- гауссовское распределение}$$

$$p(a) = \frac{a}{\sigma_a^2} e^{-a^2/2\sigma_a^2} \quad \text{-- рэлеевское распределение}$$

$$p(\varphi_0) = \begin{cases} 1/(2\pi) & \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \\ 0 & \varphi_0 \notin (-\pi, \pi] \end{cases} \quad \text{-- равномерное распределение}$$

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{Y}_1^m | a, \varphi_0) &= \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m S_k(a, \varphi_0) \left( y_k - \frac{1}{2} S_k(a, \varphi_0) \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m y_k S_k(a, \varphi_0) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{a^2 \alpha}{2\sigma_n^2} \right\}, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m S_k^2(a, \varphi_0) = \frac{a^2 \alpha}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{Y}_1^m) &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \rho(\mathbf{Y}_1^m | a, \varphi_0) p(\varphi_0) p(a) d\varphi_0 da = \\ &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{a^2 \alpha}{2\sigma_n^2} \right\} \frac{a}{\sigma_a^2} e^{-a^2/2\sigma_a^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m y_k S_k(a, \varphi_0) \right\} d\varphi_0 da\end{aligned}$$

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m y_k S_k(a, \varphi_0) \right\} d\varphi_0 = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^m y_k a A(kT - \tau) \cos((\omega_0 + \omega_d)kT + \varphi_0) \right\} d\varphi_0 = I_0 \left( \frac{2a}{\sigma_n^2} X \right) \end{aligned}$$

- функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$X = \sqrt{X_c^2 + X_s^2},$$

$$X_c = \sum_{k=1}^m y_k A(kT - \tau) \cos((\omega_0 + \omega_d)kT),$$

$$X_s = \sum_{k=1}^m y_k A(kT - \tau) \sin((\omega_0 + \omega_d)kT).$$

Отсюда 
$$\rho(\mathbf{Y}_1^m) = \int_0^{\infty} \frac{a}{\sigma_a^2} \exp \left\{ -\frac{a^2 \alpha}{2\sigma_n^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right\} I_0 \left( \frac{2a}{\sigma_n^2} X \right) da$$

# Страшный интеграл взят

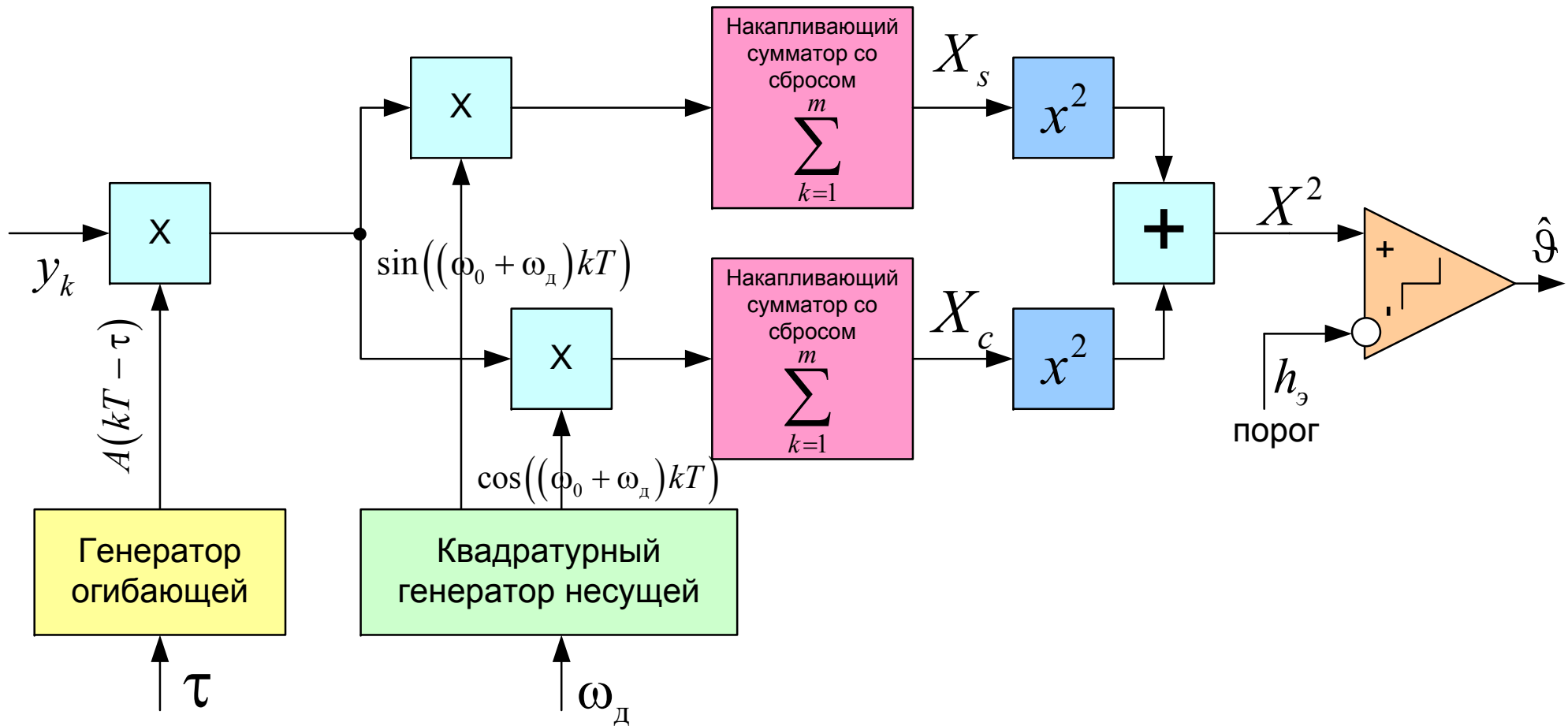
$$\rho(Y_1^m) = \int_0^{\infty} \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left\{-\frac{a^2 \alpha}{2\sigma_n^2}\right\} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right\} I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2} X\right) da =$$
$$= \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha\sigma_a^2} \exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \alpha\sigma_a^2)} X^2\right\}, \text{ введём } q_{\vartheta} = \frac{\alpha\sigma_a^2}{\sigma_n^2}, \text{ тогда}$$

$$\rho(Y_1^m) = \frac{1}{1 + q_{\vartheta}} \exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^4(1 + q_{\vartheta})} X^2\right\} \geq h$$

Решающее правило заключается в сравнении с порогом.  
Раскрываем неравенство.

$$X^2 \geq \ln((1 + q_{\vartheta})h) \frac{\sigma_n^4(1 + q_{\vartheta})}{2\sigma_a^2} = h_{\vartheta}$$

# Структура оптимального обнаружителя



# Домашнее задание (к следующей практике)

Задана обобщенная функция потерь:

Истинное значение $\vartheta$	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c(\vartheta, \hat{\vartheta})$
0	0	0
0	1	$c_{01}$
1	0	$c_{10}$
1	1	0

Требуется записать решающее правило для задачи обнаружения детерминированного сигнала при обобщённой функции потерь

$$\hat{\vartheta} = u_0(\mathbf{Y}_0^T) - ???$$

# Письменное домашнее задание

Дано:  $P_F = 1 / \left( \sum \text{номеров букв фамилии} \right)$

Найти:  $P_D(q_\vartheta) = ?$

(требуется вывести аналитическое выражение и построить график на компьютере)

