

# Адаптивная система слежения за фазой сигнала (подробный вывод и результаты моделирования)

А.А. Черкасова<sup>1</sup>, А.Ю. Шатилов<sup>2</sup>

<sup>1-2</sup> «НИУ МЭИ (Москва, Россия)

<sup>1</sup> PotrikeeveAA@mpei.ru, <sup>2</sup> ShatilovAY@mpei.ru

## Аннотация

**Постановка проблемы.** Классические оптимальные байесовские алгоритмы системы слежения за фазой (ССФ) требуют априорного знания параметров динамики процесса фазы и отношения с/ш принимаемых сигналов. На практике же эти параметры изменяются в широком диапазоне и как правило неизвестны. В следствие чего, работа таких алгоритмов в условиях, отличных от априорно заданных является не оптимальной по критерию минимума дисперсии ошибки.

**Цель.** разработать систему слежения за фазой сигнала глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС), адаптивную к динамике процесса фазы и отношению сигнал/шум для сохранения слежения за фазой в как можно более широком диапазоне условий работы

**Результаты.** Разработана многоканальная адаптивная система слежения за фазой сигнала (МАССФ).

**Практическая значимость.** Разработанная система способна обрабатывать скачок отношения сигнал/шум с 50 до 9 дБГц и обратно без потери слежения за фазой (в условиях низкой динамики), сохранять слежение за фазой при скачкообразных переходах динамики между низкой (обусловленной только динамикой опорного генератора) и высокой (синусоидальное ускорение 10g и синусоидальный рывок 10 g/s) при отношении сигнал/шум 24 дБГц. Таким образом, в реальных условиях, когда динамика объекта и отношения с/ш принимаемых сигналов меняются непредсказуемым образом, МАССФ сохраняет слежение за фазой в гораздо более широком диапазоне условий, чем неадаптивная ССФ.

## Ключевые слова

*Адаптивная система слежения за фазой, адаптивный подход, слежение за фазой сигналов глобальных навигационных систем*

A brief version in English is given at the end of the article

## Введение

Система слежения за фазой (ССФ) для аппаратуры потребителя спутниковых радионавигационных систем (АП СРНС) часто работает в условиях априорной неопределенности как отношения сигнал/шум (с/ш), так и динамики процесса фазы. Это делает невозможным выбор оптимальных параметров алгоритма фильтрации фазы.

Выделяют три основных подхода к построению алгоритмов фильтрации в таких условиях:

1) Минимаксный подход, при котором параметры ССФ оптимизируются под наиболее сложные условия. Под «сложными условиями» здесь понимается высокая динамика процесса фазы одновременно с низким отношением с/ш. Проблема в том, что ССФ, оптимизированная таким образом, не будет обеспечивать слежения за фазой при ещё более низком отношении с/ш но отсутствии динамики. Также не будет обеспечиваться слежение за фазой при ещё более высокой динамике и высоком отношении с/ш.

2) Инвариантный подход, при котором алгоритм ССФ не зависит от априорной неопределенности динамики процесса фазы. Это достигается за счет комплексной обработки, в следствие чего, требуется дополнительная информация о входном процессе от сторонних источников, например от инерциальной навигационной системы.

3) Адаптивный подход, при котором неопределенность статистических характеристик случайных процессов преодолевается их оцениванием в процессе работы. Платой здесь является снижение итоговой точности и чувствительности системы по сравнению с неадаптивной ССФ, настроенной на известные условия и работающей в этих известных условиях.

Адаптивный подход наиболее эффективен в условиях отсутствия информации о динамике процесса фазы от других измерителей, причем даже наличие такой информации не избавляет от необходимости адаптироваться под отношение сигнал/шум.

Цель – разработать систему слежения за фазой сигнала глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС), адаптивную к динамике процесса фазы и отношению сигнал/шум для сохранения слежения за фазой в как можно более широком диапазоне условий работы.

## Постановка задачи

На практике амплитуда сигнала неизвестна и меняется со временем, что приводит к изменению отношения с/ш. В принципе, эта проблема могла бы решаться путем включения амплитуды

в вектор состояния фильтра. К сожалению, амплитуду нельзя описать гауссовским Марковским процессом, (она распределена по закону Райса и не принимает значений меньше нуля). Однако гауссовским Марковским процессом можно описать амплитуду, выраженную в дБ. На практике уровень шума приемника известен и поддерживается на постоянном уровне адаптивным квантователем, поэтому оценить амплитуду сигнала – это тоже самое, что оценить отношение с/ш в дБГц. Поэтому вместо амплитуды сигнала оцениваться будет именно отношение с/ш принимаемого навигационного сигнала, выраженное в дБГц. Логарифмическая шкала допускает возможность появления значений в отрицательной области, в случае, когда аргумент десятичного логарифма меньше единицы. Кроме того, отношение с/ш в дБГц является общепринятой мерой оценки качества сигнала в навигационном приемнике.

Пусть отношение с/ш представлено Винеровским процессом. Тогда модель изменения с/ш имеет вид

$$q_k = q_{k-1} + \zeta_{k-1}T, \quad (1)$$

где  $k$  – номер отсчета;  $q_k$  - отношение мощности сигнала к спектральной плотности шума, выраженное в дБГц,  $T$  - шаг дискретизации по времени,  $\zeta_{k-1}$  - дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ) с нулевым математическим ожиданием (МО) и известным среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_\zeta$ .

Модель изменения фазы зададим марковским процессом третьего порядка

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k-1} + \omega_{k-1}T + \frac{v_{k-1}T^2}{2}, \\ \omega_k &= \omega_{k-1} + v_{k-1}T + \xi_{\omega,k-1}, \\ v_k &= v_{k-1} \cdot (1 - \beta T) + \sqrt{2\beta T} \cdot \xi_{v,k-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_k$  - фаза [рад],  $\omega_k$  - частота [рад/с],  $v_k$  - ускорение фазы [рад/с<sup>2</sup>],  $\xi_\omega$  - ДБГШ с нулевым МО и известным СКО  $\sigma_\omega$  - формирующий шум, описывающий суммарную нестабильность частоты опорных генераторов в приемнике и передатчике,  $\xi_v$  - ДБГШ с нулевыми МО и СКО  $\sigma_{v,k}$ ,  $\beta$  [1/с] - ширина спектра флуктуаций компоненты  $v_k$ , которая полагается известной.

Представим  $\sigma_{v,k}$  как

$$\sigma_{v,k} = \frac{2\pi \cdot f_0}{c} \alpha_k, \quad (3)$$

где  $f_0$  - несущая частота радионавигационного сигнала,  $c$  - скорость света,  $\alpha_k$  - неизвестный переменный параметр интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы, который имеет физический смысл среднеквадратического ускорения между передатчиком и приемником и выражен в [м/с<sup>2</sup>]. Из-за изменений  $\alpha_k$  процесс фазы будет нестационарным.

Будем считать, что величина  $\alpha_k$  принимает дискретный набор значений  $\alpha_k = \alpha_k^j, j = \overline{1, M}$  из заданной области  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . При этом задано распределение вероятностей  $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$  для переходов от значения  $\alpha_{k-1}^l$  в момент времени  $k-1$  к значению  $\alpha_k^j$  в момент времени  $k$ ;  $j = \overline{1, M}$ ,  $l = \overline{1, M}$ .

На вход приемника в дискретном времени поступает реализация наблюдений сигнала, который в интересах упрощения синтеза будем полагать гармоническим. (Полагается, что дальномерный код снят благодаря работе системы слежения за задержкой). Входной сигнал меняется существенно быстрее информативных процессов (1),(2). В этом случае целесообразно описывать входной сигнал в более частой шкале времени с шагом дискретизации  $T_d \ll T$ , как описано в [1], стр. 524. Для этого введем двойную шкалу времени

$$t_{k,i} = k \cdot T + (i - 1) \cdot T_d, \quad (4)$$

где  $k = 0, 1, \dots$  - индексы моментов редкой шкалы времени, в которой описаны информативные параметры;  $i = \overline{0, N-1}$  - индексы моментов частой шкалы времени, для описания наблюдений;

$$N = \frac{T}{T_d}.$$

С учетом введенной двойной шкалы времени опишем наблюдения входного сигнала в виде

$$y_{k,i} = A_k \cdot \cos \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,i} + \varphi_k + \omega_k i T_d + \nu_k(\alpha_k) \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} + n_{k,i}, \quad (5)$$

где  $n_{k,i}$  - ДБГШ с нулевым мат. ожиданием и дисперсией  $\sigma_n^2$ ,  $A_k$  - амплитуда сигнала.

Выразим амплитуду сигнала  $A_k$  через отношение с/ш в дБГц.

$$A_k = \sqrt{4 \cdot \sigma_n^2 \cdot T \cdot 10^{0.1q_k}}, \quad (6)$$

где  $q_k$  - отношение с/ш в дБГц.

Задача синтеза оптимальной системы фильтрации заключается в нахождении оценки информативных процессов  $q_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\nu_k$  по критерию минимума дисперсии ошибки (Байесовская оценка) с учетом неизвестного неинформативного параметра динамики фазы  $\alpha_k$ , меняющегося со временем.

#### Синтез алгоритма слежения за фазой

В литературе известно общее байесовское решение задачи оптимальной адаптивной фильтрации векторного марковского процесса  $\mathbf{x}$  при наличии вектора случайных неинформативных параметров  $\mathbf{a}$  (напр. [1], стр. 747). Решение выведено для дискретного времени при квадратичной функции потерь и минимизирует средний риск, с учетом усреднения по плотности вероятности неинформативных параметров. Данное решение сводится к следующему.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{a}) p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{a}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Y}_0^k$  - реализация наблюдений от начального момента времени до текущего момента времени  $k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{a})$  - условная оптимальная оценка вектора  $\mathbf{x}$  при фиксированном значении  $\mathbf{a}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k(\mathbf{a}) &= \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k \cdot p(\mathbf{x}_k | \mathbf{a}, \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x}_k, \\ p(\mathbf{x}_k | \mathbf{a}, \mathbf{Y}_0^k) &= c \cdot p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k(\mathbf{a})) \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{a}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{a}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{y}_k$  - вектор наблюдений на текущем шаге,  $c$  - нормировочная константа,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k(\mathbf{a}))$  - одношаговая функция правдоподобия,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{a})$  - плотность вероятности (ПВ) перехода марковского процесса  $\mathbf{x}$  при фиксированном  $\mathbf{a}$ .

Выражения (8) описывают работу байесовского фильтра при фиксированном значении векторного параметра  $\mathbf{a}$ . В случае гауссовской п.в.  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{a}, \mathbf{Y}_0^k)$  выражения (8) сводятся к уравнениям линейного или расширенного фильтра Калмана, который является оптимальным только для конкретного выбранного  $\mathbf{a}$ .

Выражение для плотности вероятности  $p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^k)$  дается в виде [1] (стр. 469):

$$p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \mathbf{a}) p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^{k-1})}{\int_{\mathbf{a}} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \mathbf{a}) p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}} \quad (9)$$

В [1] выведено уравнение для эволюции  $p(\mathbf{a} | \mathbf{Y}_0^k)$  при постоянном  $\mathbf{a}$ . В нашем случае параметр  $\mathbf{a}$  меняется за время наблюдений. Выведем уравнение для ПВ  $p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$  в случае изменяющегося параметра  $\mathbf{a}_k$ .

$$\begin{aligned} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) &= \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1} = \\ &= \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1} \end{aligned} \quad (10)$$

Допустим, что  $\mathbf{a}_k$ , является марковской последовательностью, тогда  $\mathbf{a}_k$  не зависит от выборки  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  если известно  $\mathbf{a}_{k-1}$ , то есть

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) &= \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1} = \\
 &= \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{k-1}) p(\mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Подставим полученное уравнение (11) в уравнение (9) и получим рекуррентное уравнение для эволюции апостериорной плотности вероятности (АПВ) процесса  $\mathbf{a}_k$

$$p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \mathbf{a}_k) \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{k-1}) p(\mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1}}{\int_{\mathbf{a}_k} \left( p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \mathbf{a}_k) \int_{\mathbf{a}_{k-1}} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{k-1}) p(\mathbf{a}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{a}_{k-1} \right) d\mathbf{a}_k} \tag{12}$$

Решение задачи оптимальной адаптивной фильтрации в виде (7) имеет физически реализуемое решение только в случае, когда  $\mathbf{a}_k$  принимает дискретные значения  $\mathbf{a}_k = \alpha_k^j, j = \overline{1, M}$  из заданной области, что, как правило, приемлемо для практических применений. Такое решение получило название многоканальной адаптивной фильтрации, ([1], стр. 745), где каждому дискретному значению  $\alpha_k^j$  соответствует свой канал фильтрации.

Дискретизация значений  $\mathbf{a}_k$  приводит к тому, что процесс  $\mathbf{a}_k$  становится марковской цепью, с распределением вероятностей перехода от значения  $l$  в момент времени  $k-1$  к значению  $j$  в момент времени  $k$   $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$ . Учитывая дискретность  $\alpha_k^j$ , в уравнениях (7) и (12) интегрирование заменяется на операцию суммирования, а соответствующие плотности вероятностей – на распределения вероятностей. Также учтем, что в нашем случае параметр  $\mathbf{a}_k$  является скалярной величиной, то есть  $\alpha_k^j \equiv \alpha_k^j, j = \overline{1, M}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_k &= \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_k^j) P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k), \\
 \tilde{P}(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k) &= p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j) \sum_{l=1}^M P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l) P(\alpha_{k-1}^l | \mathbf{Y}_0^{k-1}), \\
 P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k) &= \frac{\tilde{P}(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k)}{\sum_{j=1}^M \tilde{P}(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (8) и (13) полностью описывают общий алгоритм многоканальной адаптивной фильтрации процесса  $\mathbf{x}_k$ . Применим их для решения поставленной задачи адаптивной фильтрации фазы.

Объединим оцениваемые информативные параметры в вектор.

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} q_k \\ \varphi_k \\ \omega_k \\ \nu_k \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Оцениваемый процесс, описывается линейным разностным уравнением.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_k &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}(\alpha_k) \cdot \xi_{k-1}, \\
 \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_{ap},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\mathbf{x}_{ap}$  - априорно известные начальные значения вектора состояния (14),  $\xi_{k-1}$  - ДБГШ с нулевым МО и единичной корреляционной матрицей  $\mathbf{D}_\xi = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  – известные матрицы

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & (1-\beta T) \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} T\sigma_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\beta T} \frac{2\pi f_0}{c} \alpha_k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Введем вектор наблюдений, сгруппированных на интервале  $t_k \dots t_{k+1}$  с учетом введенной двойной шкалы времени (4).

$$\mathbf{y}_k = [y_{k,0}, y_{k,2}, \dots, y_{k,N-1}]^T = \mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k, \quad (17)$$

$$\mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k) = [s_{k,0}(\mathbf{x}_k), \dots, s_{k,N-1}(\mathbf{x}_k)]^T = \sqrt{4 \cdot \sigma_n^2 \cdot T_d \cdot 10^{0.1q_k}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,0} + \varphi_k + \omega_k \cdot 0 \cdot T_d + \nu_k \frac{(0 \cdot T_d)^2}{2} \right\} \\ \vdots \\ \cos \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,N-1} + \varphi_k + \omega_k (N-1)T_d + \nu_k \frac{((N-1)T_d)^2}{2} \right\} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{n}_k = [n_{k,0}, \dots, n_{k,N-1}],$$

где  $\mathbf{n}_k$  - векторный дискретный белый гауссовский шум с нулевым МО и диагональной матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_n$ , на диагонали которой лежат значения  $\sigma_n^2$ .

#### Алгоритм фильтрации в одном канале

Выведем алгоритм для формирования условной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_k^j)$  при фиксированном  $\alpha_k^j$ , которая соответствует АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Y}_0^k)$ . Описание наблюдений вида (18) и динамики вектора состояний в виде (15), (16) позволяет записать искомый алгоритм в виде расширенного фильтра Калмана [1]. Для упрощения записи будем обозначать  $\mathbf{G}(\alpha_k^j) \equiv \mathbf{G}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_k^j) \equiv \hat{\mathbf{x}}_k^\alpha$ .

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha &= \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^\alpha; \\ \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{D}}_{x,k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_{k-1}^T \end{aligned} \quad (19)$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{x,k} &= \left( \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}^{-1} + \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^\alpha &= \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha + \hat{\mathbf{D}}_{x,k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)) \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{D}_\xi = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ .

В расширенном фильтре Калмана можно выделить векторный дискриминатор  $\mathbf{u}_{d,k} = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha))$ , который содержит отсчеты наблюдений, поступающие с высоким темпом. Т.к. информационный процесс меняется гораздо медленнее, то можно сказать, что на интервале  $t_k \dots t_{k+1}$  значения оценок  $\hat{\mathbf{x}}_k^\alpha$  и матрицы  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}$  не меняются, то есть выходной сигнал дискриминатора формируется в «редкой» шкале времени. Тогда, с учетом подстановки выражений (17), (18):

$$\mathbf{u}_{d,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)). \quad (21)$$

Матрица  $\mathbf{W}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}}$ , входит в состав (20). Для определенности будем

называть матрицу  $\mathbf{W}_k$  эквивалентной матрицей весов наблюдений  $\mathbf{W}_k$ , поскольку она отвечает за вклад наблюдений в уточнение оценки вектора состояний. С учетом (22) и (14):

$$\mathbf{W}_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (22)$$

Учитывая (21) и (22), этап коррекции приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{x,k} &= (\tilde{\mathbf{D}}_{x,k}^{-1} + \mathbf{W}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^\alpha &= \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha + \hat{\mathbf{D}}_{x,k} \cdot \mathbf{u}_{d,k} \end{aligned} \quad (23)$$

где после раскрытия и упрощения (21) и (22) имеем

$$\mathbf{u}_{d,k} = \begin{pmatrix} u_{q,k} \\ u_{\phi,k} \\ u_{\omega,k} \\ u_{v,k} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{A}_k}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \frac{\ln(10^{0.1})}{2} \cdot \left[ I_k - \frac{\tilde{A}_k N}{2} \right] \\ -Q_k \\ -Q'_k \\ -Q'' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_k = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \frac{N(\ln(10^{0.1}))^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} (iT_d)^2 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^4}{4} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\tilde{A}_k = \sqrt{4 \cdot \sigma_n^2 \cdot T_d \cdot 10^{0.1 \tilde{q}_k}},$$

$$I_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \cos \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{v}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\},$$

$$Q_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{v}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\},$$

$$Q'_k = \sum_{i=0}^{N-1} iT_d \cdot y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{v}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\},$$

$$Q''_k = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} \cdot y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi \cdot f_o \cdot t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{v}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}.$$

Выражения (16),(19),(23),(24) описывают работу фильтра в одном канале, который настроен на формирование оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_k^j)$  при заданном параметре интенсивности динамики фазы  $\alpha_k^j$ .

При этом величина ошибки фильтрации будет, в том числе, зависеть от того, насколько истинная динамика фазы соответствует выбранному значению  $\alpha_k^j$ .

#### Расчет канальных весов

Как следует из (13), исходной информацией для взвешивания оценок из разных каналов является плотность вероятности  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$ , играющая ту же роль, что одношаговая функция правдоподобия в уравнении Стратоновича для дискретного времени. Физический смысл этой ПВ заключается в том, что она показывает насколько правдоподобно наблюдение  $\mathbf{y}_k$  исходя из прогноза по предыдущим наблюдениям  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  при выбранном значении параметра динамики  $\alpha_k^j$ . Наблюдения  $\mathbf{y}_k$  в соответствии с (17) не зависят явным образом от  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$ , а зависят только от текущего значения информативного процесса  $\mathbf{x}_k$  (через сигнальную функцию). Но в отличие от одношаговой функции правдоподобия здесь значение информативного процесса  $\mathbf{x}_k$  неизвестно. Тем не менее, по наблюдениям на предыдущих шагах  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  и в предположении, что параметр динамики  $\alpha_k$  принимает конкретное значение  $\alpha_k^j$ , можно сформировать экстраполированную оценку информативного процесса  $\mathbf{x}_k$ , которая определена в (19), то есть,  $\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha \equiv (\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$ . А по экстраполированной оценке  $\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha$ , вобравшей в себя всю информацию о предыдущих наблюдениях  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$ , можно спрогнозировать  $\mathbf{y}_k$  через  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)$ . Поэтому ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$  эквивалентна ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ , которую можно найти следующим образом.

Экстраполированную оценку  $\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha$  можно представить как сумму истинного значения информативного параметра и ошибки, зависящей от параметра  $\alpha$ .

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha = \mathbf{x}_k + \delta_k^\alpha. \quad (25)$$

Тогда  $\mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha)$ , а вектор наблюдений на шаге  $k$  равен

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha) + \mathbf{n}_k. \quad (26)$$

Будем считать ошибку  $\delta_k^\alpha = \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \mathbf{x}_k$  распределенной по гауссовскому закону. Однако,  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha)$  - нелинейная функция и соответственно отсчеты сигнальной функции уже не распределены по нормальному закону, и ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$  не будет гауссовской. Однако, по аналогии с гауссовской аппроксимацией АПВ, можно применить гауссовскую аппроксимацию и к ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ . Для этого разложим функцию  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha)$  в ряд Тейлора в точке  $\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha$ . Ограничимся первыми двумя членами

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha) &\approx \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \left( (\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \delta_k^\alpha) - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha \right) = \\ &= \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k^\alpha) \end{aligned} \quad (27)$$

Запишем модель наблюдений на шаге  $k$  учитывая (27)

$$\mathbf{y}_k \approx \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k^\alpha) + \mathbf{n}_k. \quad (28)$$

$\frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k^\alpha) = \boldsymbol{\zeta}_k$  - векторный ДБГШ с нулевым МО и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\zeta}, k}$ .  $\mathbf{n}_k$  - это вектор столбец, содержащий отсчеты ДБГШ с нулевым МО и диагональной матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_n$ , на диагонали которой лежат значения  $\sigma_n^2$ .

В соответствии с (28),  $\mathbf{y}_k$  представляет собой векторную случайную величину с МО  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)$ . Матрицу дисперсий векторной случайной величины  $\mathbf{y}_k$  обозначим как  $\mathbf{D}_{y,k}$ . Матрица дисперсий  $\mathbf{D}_{y,k}$  будет определяться суммой дисперсий слагаемых  $\boldsymbol{\zeta}_k$  и  $\mathbf{n}_k$ , так как эти слагаемые независимы. Учитывая это, запишем матрицу дисперсий  $\mathbf{D}_{y,k}$

$$\mathbf{D}_{y,k} = \mathbf{D}_{\zeta,k} + \mathbf{D}_n. \quad (29)$$

Найдём матрицу  $\mathbf{D}_{\zeta}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\zeta,k} &= \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\zeta}_k \cdot (\boldsymbol{\zeta}_k)^T \right] = \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} (-\boldsymbol{\delta}_k^\alpha) \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} (-\boldsymbol{\delta}_k^\alpha) \right)^T \right] = \\ &= \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\delta}_k^\alpha \cdot (\boldsymbol{\delta}_k^\alpha)^T \right] \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \end{aligned} \quad (30)$$

По определению,  $\mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\delta}_k^\alpha \cdot (\boldsymbol{\delta}_k^\alpha)^T \right] = \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}$ , следовательно

$$\mathbf{D}_{\zeta,k} = \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T. \quad (31)$$

С учетом (28) ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ , при фиксированном значении  $\alpha_k^j$ , можно представить в виде гауссовской ПВ, с математическим ожиданием  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)$  и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{y,k}$ .

$$p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j) = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \det(\mathbf{D}_{y,k}))^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha))^T \mathbf{D}_{y,k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)) \right\}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{y,k} &= \mathbf{D}_{\zeta,k} + \mathbf{D}_n = \\ &= \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T + \mathbf{D}_n \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнения (13), (16) - (19), (23), (24), (32), (33) полностью представляют оптимальный алгоритм многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнала (МАССФ).

#### Упрощение расчета канальных весов

В выражениях в (32), (33) размерность вектора наблюдений  $\mathbf{y}_k$  равна  $N$ , а размерность матрицы  $\mathbf{D}_{y,k}$  составляет  $N \times N$ . На практике величина  $N$  может составлять десятки тысяч. Это ведет к серьезным сложностям при практической реализации алгоритма. Данную проблему можно преодолеть, перейдя к эквивалентной линеаризованной системе фильтрации [2].

На рисунке 1 представлена структурная схема нелинейного канального фильтра  $j$ , определяемого уравнениями (16), (19), (23), (24), а на рисунке 2 представлена эквивалентная схема линеаризованной системы  $j$ -го канального фильтра, на вход которого поступают эквивалентные наблюдения вида

$$\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k}$  - вектор эквивалентных ДБГШ с нулевым МО и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k}}$ .



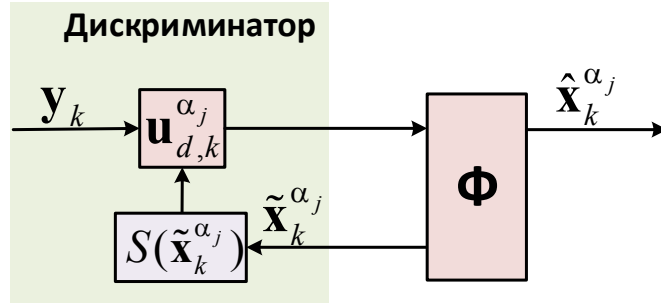


Рисунок 1. Структурная схема j-го канального фильтра

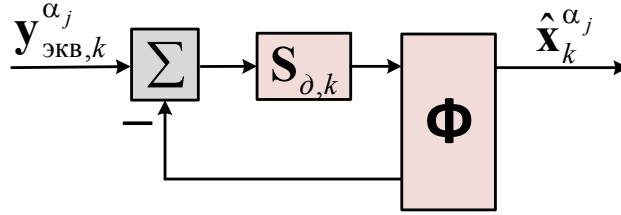


Рисунок 2. Эквивалентная схема линейризованной системы j-го канального фильтра

В эквивалентной линейризованной системе плотности вероятности  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$  будет соответствовать плотность вероятности  $p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ . Другими словами, если бы постановка решаемой задачи адаптивной многоканальной фильтрации фазы включала бы модель наблюдений вида (34) вместо (17), то при формировании оптимальной взвешенной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  в (13) вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$  использовалась бы  $p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ . То есть, эти плотности вероятности эквивалентны, и вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$  в (13) можно подставлять  $p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$ . По аналогии с (32) можно записать

$$p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j) = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \det(\mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}))^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)^T \mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}^{-1} (\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) \right\}. \quad (35)$$

Размерность вектора эквивалентных наблюдений  $\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k}$  равна 4, а размерность матрицы дисперсий  $\mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}$  равна  $4 \times 4$ , поэтому гораздо проще рассчитать  $p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$  вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j)$ .

Для расчета  $p(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha, \alpha_k^j)$  найдем  $(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)$  и  $\mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}$ . Для этого представим процесс на выходе дискриминатора в виде

$$\mathbf{u}_{d,k} = \mathbf{U}_{d,k}(\delta_k^\alpha) + \boldsymbol{\psi}_k, \quad (36)$$

где  $\mathbf{U}_{d,k}(\delta_k^\alpha) = \mathbf{M}[\mathbf{u}_{d,k}]$  - сигнал ошибки;  $\boldsymbol{\psi}_k$  - флуктуационная составляющая процесса на выходе векторного дискриминатора.

Сигнал ошибки процесса на выходе  $\mathbf{u}_{d,k}$  описывается векторной дискриминационной характеристикой и зависит только от рассогласования оценки информационного параметра и его истинного значения. Полагая ошибку слежения  $\delta_k^\alpha = \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha - \mathbf{x}_k$  малой, можно представить процесс на выходе векторного дискриминатора как

$$\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\partial,k} \cdot \delta_k^\alpha + \boldsymbol{\psi}_k,$$

(37)

где  $\mathbf{S}_\delta$  - матрица крутизны векторной дискриминационной характеристики, которую можно получить взяв матожидание от (21) и выполнив дифференцирование по  $\delta^\alpha$ .

$$\mathbf{S}_{\delta,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{U}_{d,k}(\delta^\alpha)}{\partial \delta^\alpha} \right|_{\delta^\alpha=0} = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (38)$$

Сопоставляя (38) и (22) можно заключить, что  $\mathbf{S}_{\delta,k} = \mathbf{W}_k$ .

Флуктуационная составляющая на выходе дискриминатора, как следует из (21), равна

$$\boldsymbol{\Psi}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k. \quad (39)$$

Отсчеты флуктуационной составляющей на выходе дискриминатора представляют собой векторную гауссовскую СВ с нулевым МО и матрицей ковариаций  $\mathbf{C}_\Psi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\Psi &= \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\Psi}_k \cdot (\boldsymbol{\Psi}_k)^T \right] = \\ &= \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k \cdot \left( \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k \right)^T \right] = \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{M} \left[ \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k^T \right] \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{W}_k \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда представим процесс на выходе дискриминатора как

$$\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\delta,k} (\delta^\alpha + \mathbf{S}_{\delta,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k) = \mathbf{S}_{\delta,k} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha + \mathbf{S}_{\delta,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k). \quad (41)$$

Полагая шум эквивалентных наблюдений в (34)  $\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k}$  равным  $\mathbf{S}_{\delta,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k$  перепишем (34) в виде

$$\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{S}_{\delta,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41) получим  $\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\delta,k} (\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)$ , отсюда

$$(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) \approx \mathbf{S}_{\delta,k}^{-1} \mathbf{u}_{d,k}. \quad (43)$$

Найдем  $\mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}$ . Согласно (35)  $\mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k}$  является дисперсией несмещенной векторной случайной величины  $(\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) = (\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) = \mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} - \delta_k^\alpha$ . Шум эквивалентных наблюдений на шаге  $k$   $\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k}$  не коррелирован с ошибкой экстраполированной оценки  $\delta_k^\alpha$ , поскольку в эту ошибку вошли только шумы с предыдущих шагов  $1 \dots (k-1)$ , а по условию задачи шум наблюдений в различные моменты времени не коррелирован. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{ЭКВ},k} &= \mathbf{M} \left[ (\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha) (\mathbf{y}_{\text{ЭКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k^\alpha)^T \right] = \mathbf{M} \left[ (\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} - \delta_k^\alpha) (\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} - \delta_k^\alpha)^T \right] = \\ &= \mathbf{M} \left[ \mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k} (\mathbf{n}_{\text{ЭКВ},k})^T \right] + \mathbf{M} \left[ \delta_k^\alpha \cdot (\delta_k^\alpha)^T \right] \end{aligned}$$

По определению  $M \left[ \delta_k^\alpha \cdot (\delta_k^\alpha)^\top \right] = \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}$ , алгоритм вычисления этой матрицы задан в (19).

Матрица дисперсий шума эквивалентных наблюдений  $\mathbf{D}_{\mathbf{n}\alpha,k}$  определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{n}\alpha,k} &= M \left[ \mathbf{n}_{\text{экв},k} (\mathbf{n}_{\text{экв},k})^\top \right] = M \left[ (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k) (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k)^\top \right] = \\ &= \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} M \left[ \boldsymbol{\Psi}_k \cdot (\boldsymbol{\Psi}_k)^\top \right] (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1})^\top = \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \mathbf{S}_{\partial,k} (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1})^\top = \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} = \mathbf{W}_k^{-1} \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда матрица дисперсий  $\mathbf{D}_{\text{экв},k}$  равна

$$\mathbf{D}_{\text{экв},k} = \mathbf{D}_{\mathbf{n}\alpha,k} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k} = \mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}. \quad (45)$$

Подставляя (43) и (45) в (35) получим

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \mathbf{Y}_{\text{экв},0}^{k-1}, \alpha_k^j) &= \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \det(\mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}))^{n/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{u}_{d,k})^\top (\mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k})^{-1} (\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{u}_{d,k}) \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

Выражения (13), (16) - (19), (23), (24), (46) полностью определяют оптимальный алгоритм многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнала, с учетом сделанного приближения  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha_k^j) \approx p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \mathbf{Y}_{\text{экв},0}^{k-1}, \alpha_k^j)$ . Структурная схема этой системы представлена на рисунке 3.

Помимо самой взвешенной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  интерес также представляет апостериорная дисперсия этой оценки, которую обозначим как  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$ . Ввиду существенной корреляции как оценок на выходах канальных фильтров  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_k^j)$ , так и их дисперсий  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha_k^j)$ , будем приближенно формировать  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$  как результат взвешивания дисперсий на выходах канальных фильтров (23) с теми же весами, что и при формировании  $\hat{\mathbf{x}}_k$  в выражении (13), то есть

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha_k^j) P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k), \quad (47)$$

где  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha_k^j)$  – дисперсии, формирующиеся в канальных фильтрах с номерами  $j = \overline{1, M}$  в соответствии с выражением (23).

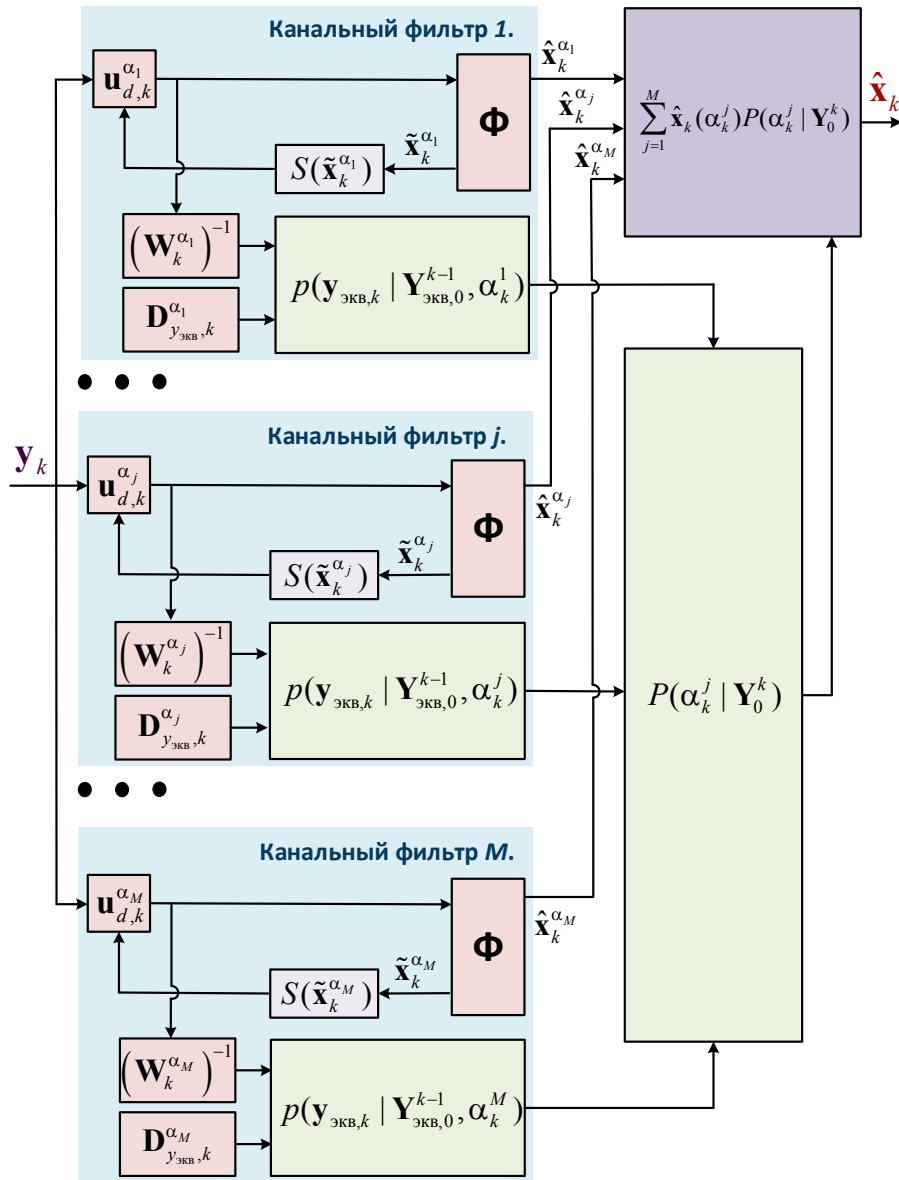


Рисунок 3. Структурная схема многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнала

### Поддержка работоспособности канальных фильтров

Следует подчеркнуть, что выражения для канальных фильтров (19),(23),(24), выведены при гауссовской аппроксимации АПВ и поэтому описываемые нелинейные системы слежения за фазой подвержены срыву. По этим причинам апостериорная дисперсия, рассчитанная в соответствии (46), является неточной, когда канальный фильтр близок к срыву, или уже сорвался, и поэтому не пригодна для формирования ПВ  $p(y_{\text{экр},k} | Y_{\text{экр},0}^{k-1}, \alpha_k^j)$  в соответствии с (46). Поэтому сорвавшиеся канальные фильтры не пригодны для формирования взвешенной оценки в соответствии с (13). Кроме того, сорвавшийся канальный фильтр даже при наступлении благоприятных условий в меняющейся динамической обстановке, как правило, уже не способен восстановить слежение из-за слишком больших накопленных ошибок по доплеровской частоте и ускорению фазы.

Исходя из вышесказанного, необходимо поддерживать работоспособность канальных фильтров. Подчеркнем, что эта необходимость вызвана гауссовской аппроксимацией АПВ. Предлагается следующий эмпирический метод поддержания работоспособности канального фильтра. Фильтры, близкие к срыву, начинают терять синхронизм по фазе, что проявляется в снижении формируемой оценки отношения сигнал/шум из-за использования когерентного амплитудного дискриминатора  $u_{q,k}$  в (24). Для таких фильтров выполняется преднамеренная замена оценки фазы, доплеровской частоты и ускорения фазы векторе состояний на оптимальные взвешенные

оценки этих параметров на выходе всей многоканальной системы. Данный алгоритм можно записать следующим образом

если для отношения с/ш на выходе канального фильтра  $j = \overline{1, M}$  выполняется условие  $\hat{q}_k^{\alpha_j} < \max_j(\hat{q}_k^{\alpha_j}) - 5\text{дБ}$ , то

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k^{\alpha_j} &= \hat{\varphi}_k, \\ \hat{\omega}_k^{\alpha_j} &= \hat{\omega}_k, \\ \hat{v}_k^{\alpha_j} &= \hat{v}_k.\end{aligned}\tag{48}$$

Следует отметить, что для сорвавшихся канальных фильтров (как выяснено по результатам моделирования) величина  $p(\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} | \mathbf{Y}_{\text{эКВ},0}^{k-1}, \alpha_k^j)$  оказывается пренебрежимо малой, что приводит к обнулению соответствующих весов при формировании общей оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

#### Детектирование срыва слежения за фазой

МАССФ является нелинейной системой, вследствие чего, при достижении отношения с/ш некоего минимального критического значения, резко нарастает ошибка слежения за фазой (срыв). Причина срыва – выход ошибки оценки фазы за пределы дискриминационной характеристики в фильтре с максимальным весом, или сразу в нескольких фильтрах. Под срывом слежения за фазой в МАССФ будем понимать выход ошибки оценки фазы на выходе многоканальной системы за пределы  $\pm\pi$  рад.

Вероятность срыва слежения за фазой растет с увеличением среднего квадрата ошибки. Тогда, можно сказать, что если средний квадрат ошибки слежения достигнет порогового уровня, то произойдет срыв слежения. В литературе [3], стр. 184, предлагается использовать консервативное эмпирическое правило, которое устанавливает следующее пороговое значение ошибки для сигналов, не модулированных навигационным сообщением:  $3\sigma_{\text{ССФ}} \leq 1.57$  рад, где  $\sigma_{\text{ССФ}}$  - СКО ошибок оценок фазы. В работе [4] применен вероятностный подход. Определено, что для вероятности срыва слежения за фазой равной 0.5, пороговый уровень ошибки для сигналов, не модулированных навигационным сообщением, равен  $3\sigma_{\text{ССФ}} \leq 1.44$  рад.

Исходя из синтеза системы МАССФ, зная апостериорную дисперсию оценки фазы,  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}(2,2)$ , можно представить средний квадрат ошибки оценок фазы как

$$\sigma_{\text{МАССФ}} = \sqrt{\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}(2,2)}.\tag{49}$$

Тогда, сравнивая это значение с пороговым значением ошибки, можно определить произошел ли срыв фазы в МАССФ. В качестве порогового значения ошибки примем  $3\sigma_{\text{МАССФ}} \leq 1.57$  рад.

На рисунке 4 представлен график ошибки оценки фазы ( $\varepsilon_\varphi$ ). На 11 секунде произошел срыв слежения за фазой. В этот момент  $3\sigma_{\text{ССФ}}$  превышает заданный порог. С 11 по 12 секунду слежение за фазой восстановлено на другой фазовой дорожке, в это время  $3\sigma_{\text{МАССФ}}$  находятся на уровне порогового значения. Далее происходит окончательный срыв фазы без восстановления слежения за фазой.  $3\sigma_{\text{МАССФ}}$  сильно превышает пороговое значение.

Стоит отметить, что детектирование срыва фазы не происходит мгновенно. Ошибка оценки фазы может успеть вырасти до нескольких циклов. Например, на рисунке 4 видно, что при превышении  $3\sigma_{\text{ССФ}}$  порогового значения, ошибка оценки фазы уже составляла более  $2\pi$  радиан. Процесс роста ошибки фазы до момента детектирования срыва длился около 0,3 сек. Это иллюстрирует практическую важность такой характеристики ССФ как время детектирования срыва слежения.

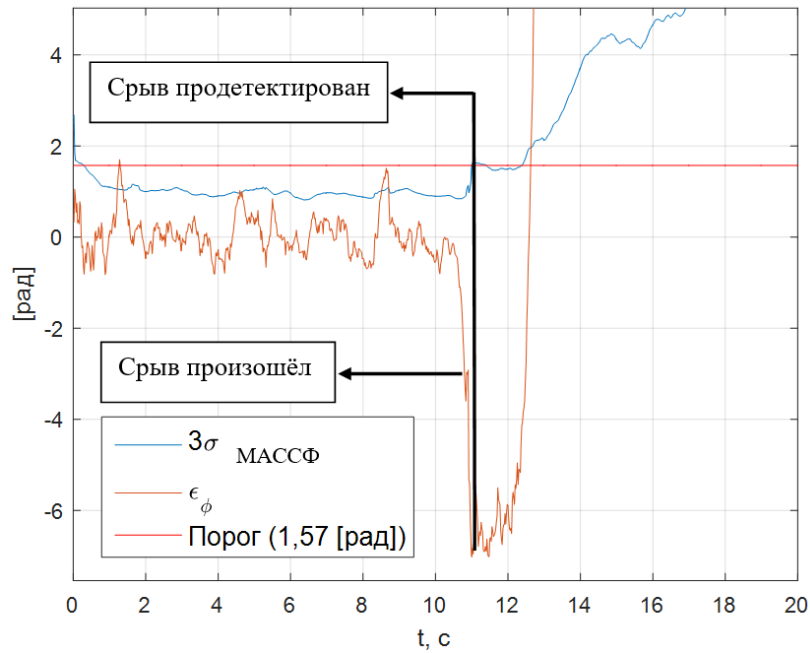


Рисунок 4. Детектирование срыва слежения за фазой.  $\epsilon_\phi$  - ошибки оценки фазы в МАССФ,

$$\sigma_{МАССФ} = \sqrt{\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}(2,2)} - \text{СКО ошибки оценки фазы.}$$

**Оценка текущей динамики и отношения сигнал/шум**

Классические оптимальные байесовские алгоритмы ССФ требуют априорного знания параметров динамики процесса фазы и отношения с/ш принимаемых сигналов. На практике же эти параметры изменяются в широком диапазоне и как правило неизвестны. В следствие чего, работа таких алгоритмов в условиях отличных от априорно заданных является не оптимальной по критерию минимума дисперсии ошибки.

Поэтому в аппаратуре потребителей спутниковых радионавигационных систем, как правило, не применяются оптимальные байесовские алгоритмы. Вместо этого применяются адаптивные робастные алгоритмы [6-10], основанные на текущем оценивании энергетики принимаемых сигналов и взаимной динамики передатчика и приемника. Далее эти параметры используются для адаптации эквивалентных шумовых полос (ЭШП) следящих систем. Для оценки отношения с/ш принимаемых сигналов, взаимной динамики передатчика и потребителя и адаптации ЭШП следящих систем используются эмпирические алгоритмы [6-10], которые не позволяют достичь потенциальных характеристик чувствительности и точности.

Синтезированный алгоритм системы МАССФ включает в себя и оценивание отношения с/ш, и оценивание динамики процесса фазы – как результат постановки и решения задачи оптимального синтеза. Вся информация о текущей динамике содержится в апостериорном распределении вероятностей  $P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k)$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Зная это распределение можно сформировать байесовскую оценку среднеквадратического ускорения процесса фазы ( $\alpha$ ) в виде

$$\hat{\alpha}_k = \arg \max_j P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k), \tag{50}$$

или

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{j=1}^M \alpha_k^j P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k). \tag{51}$$

Оценка отношения с/ш принимаемого сигнала производится за счет включения данного параметра в вектор состояния адаптивной системы, то есть

$$\hat{q}_k = \hat{\mathbf{x}}_k(1). \tag{52}$$

Важно отметить, что оценка отношения с/ш формируется при помощи когерентного амплитудного детектора (24). Поэтому при существенной рассинхронизации по фазе, в частности, при срыве слежения, оценка отношения с/ш оказывается всегда заниженной, что однозначно при-

водит к росту апостериорного СКО оценки фазы  $\sigma_{ССФ}$  и упрощает детектирование срыва слежения.

**Условия и результаты моделирования**

Синтезированная МАССФ – сложная многомерная система. Основной метод исследования такого рода систем это статистическое моделирование. При моделировании выбраны следующие параметры МАССФ.

Входной сигнал моделируется в частой шкале времени с периодом дискретизации  $T_d = 100$  мкс. Оценка параметров сигнала в модели производится в более редкой шкале времени с шагом дискретизации  $T = 20$  мс.

СКО формирующего шума в динамической модели (1) для отношения мощности сигнала к спектральной плотности шума принято равным  $\sigma_\zeta = 20$  дБГц/с.

Ширина спектра флуктуаций ускорения фазы  $\nu_k$  принята равной  $\beta = 1$  с<sup>-1</sup>.

СКО формирующего шума, описывающего нестабильность частоты опорного генератора потребителя, в модели (2) рассчитывается через девиацию Аллана как

$$\sigma_\omega = 2\pi \cdot f_0 A_{dev} = 2\pi \cdot 1602 \cdot 10^6 \cdot 1.5 \cdot 10^{-10} = 1.5 \text{ рад/с.} \tag{53}$$

Задан следующий набор из  $M=10$  значений среднеквадратического ускорения между передатчиком и приемником, который покрывает практически весь диапазон ускорений реальных объектов применения:

$$\alpha^{1...M} = \{0.01, 0.033, 0.1, 0.33, 1, 3.3, 10, 22, 33, 43\} \text{ м/с}^2 \tag{54}$$

Распределение вероятностей перехода  $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $l = \overline{1, M}$  считается стационарным (не зависящим от  $k$ ) и задано в виде таблицы (Таблица 1). Значения вероятностей перехода выбраны исходя из соображения о том, что наиболее вероятным является сохранение текущей категории динамики, а переход через категорию динамики является практически невероятным.

Таблица 1. Распределение вероятностей перехода  $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$

$\alpha_k^j \backslash \alpha_{k-1}^l$	$\alpha_{k-1}^1$	$\alpha_{k-1}^2$	$\alpha_{k-1}^3$	$\alpha_{k-1}^4$	$\alpha_{k-1}^5$	$\alpha_{k-1}^6$	$\alpha_{k-1}^7$	$\alpha_{k-1}^8$	$\alpha_{k-1}^9$	$\alpha_{k-1}^{10}$
$\alpha_k^1$	$\theta_{j=1}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^2$	$2 \cdot 10^{-25}$	$\theta_{j=2}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^3$	$10^{-25}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=3}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^4$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=4}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^5$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=5}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^6$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=6}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^7$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=7}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^8$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=8}$	$10^{-25}$	$10^{-50}$
$\alpha_k^9$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=9}$	$2 \cdot 10^{-25}$
$\alpha_k^{10}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-50}$	$10^{-25}$	$\theta_{j=10}$

где  $\theta_j = 1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^M P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$ .

Задача корректного выбора вероятностей перехода  $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$  вряд ли может быть формализована и решена даже при наличии сведений о характере движения приемника. Значения этих вероятностей в таблице 1 подобраны по итогам экспериментов с моделью в условиях низкого отношения сигнал/шум. При этом было замечено, что характеристики адаптации МАССФ слабо меняются в очень широком диапазоне вероятностей  $P(\alpha_k^j | \alpha_{k-1}^l)$ , лежащих вне диагонали таблицы 1: от  $10^{-5}$  до  $10^{-50}$ .

С помощью статистического моделирования проводится сравнение работы двух систем: МАССФ и РФК, оптимального для заданных параметров динамики процесса фазы и отношения сигнал шум. Алгоритм работы РФК описывается уравнениями (14), (16), (19),(23),(24), и полностью повторяет работу канального фильтра в МАССФ с учетом фиксированного отношения сигнал/шум  $\hat{q}_k = q_k$ .

Сравнение систем МАССФ и РФК проводится в условиях низкой и высокой динамики. Под **низкой динамикой** подразумевается динамика фазы, обусловленная только динамикой опорного генератора. Под **высокой динамикой** подразумевается динамика фазы, обусловленная динамикой опорного генератора, синусоидальным ускорением  $10g$  и синусоидальным рывком  $10 g/s$  между передатчиком и приемником.

Динамика опорного генератора в модели формируется по записи процесса фазы реального термокомпенсированного опорного генератора с девиацией Аллана на 1 секунде равной  $A_{dev} = 1.5e-10$ . Запись получена по методу [5]. Девиация Аллана опорного генератора представлена на рисунке 5. График кажущейся доплеровской частоты относительно несущей  $1602$  МГц из-за нестабильности опорного генератора представлен на рисунке 6.

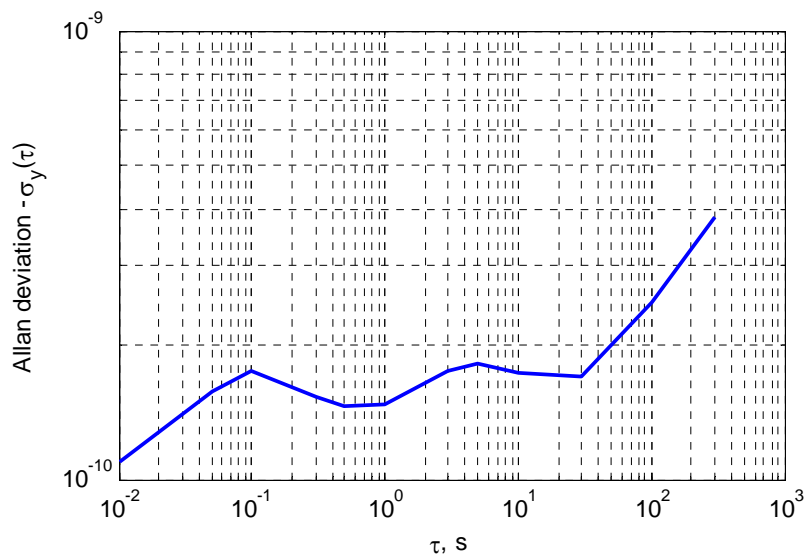


Рисунок 5. Девиация Аллана опорного генератора

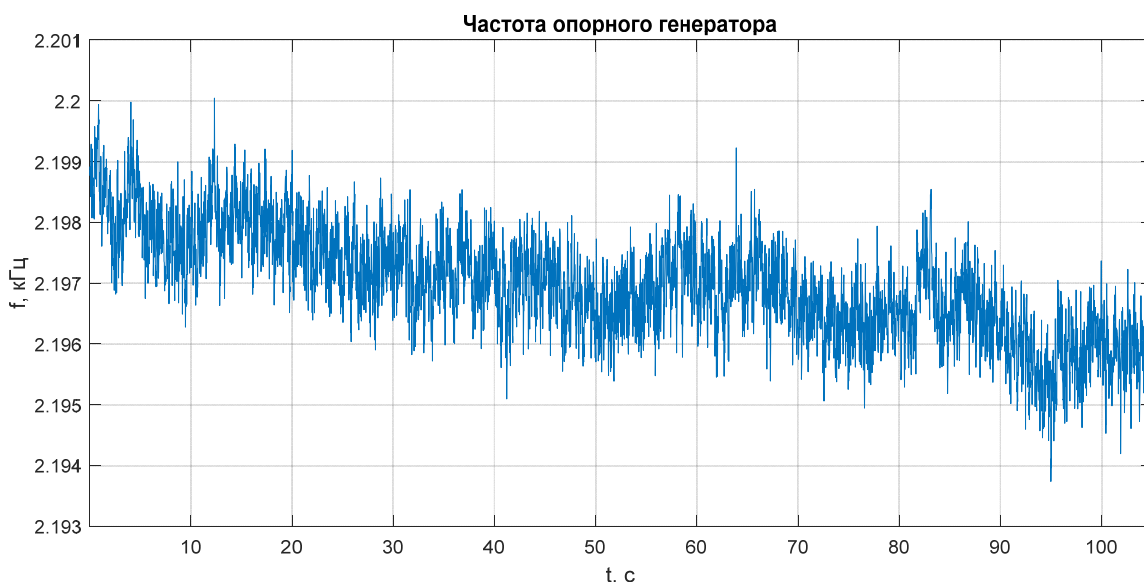


Рисунок 6. График кажущейся доплеровской частоты сигнала относительно несущей  $1602$  МГц из-за нестабильности частоты опорного генератора

Сравниваются следующие характеристики МАССФ и неадаптивного РФК:

- **Точность** оценки фазы при воздействии низкой динамики.



- **Чувствительность** слежения за фазой при воздействии низкой динамики.
- **Точность** оценки фазы при воздействии высокой динамики.
- **Чувствительность** слежения за фазой при воздействии высокой динамики.

Точность оценки фазы характеризует фактическую величину ошибки оценок фазы и будет определяться как выборочное СКО ошибки оценки фазы по выборке длительностью 100 с.

Под чувствительностью слежения за фазой здесь будем понимать минимальное отношение сигнал/шум при котором за 100 секунд слежения происходит не более 1-го срыва слежения за фазой с вероятностью 0.5. Под срывом слежения за фазой будем понимать выход ошибки оценки фазы за пределы  $\pm\pi$  рад.

МАССФ разработана для обеспечения оптимальных характеристик слежения за фазой в нестационарных условиях как по отношению сигнал/шум, так и по динамике процесса фазы. В сценарии моделирования будем менять СКО ускорения фазы и отношение сигнал/шум скачкообразным образом. Известно, что в таких условиях алгоритмы слежения за фазой, оптимальные для априорно известной динамики и отношения сигнал/шум, не только не позволяют достичь потенциальных характеристик чувствительности и точности, но и не способны сохранить слежение за фазой. Разработан сценарий моделирования со скачкообразным изменением отношения с/ш и динамики, что на практике, например, может соответствовать разгонам/торможениям автомобиля с приемной антенной (при движении в городе) и проездам под мостами и между высотными зданиями. В этом сценарии определяется возможность слежения за фазой в следующих системах:

- МАССФ;
- РФК, который оптимизирован для низкой динамики и минимального отношения сигнал/шум, при котором сохраняется слежение за фазой в условиях низкой динамики;
- РФК, который оптимизирован для высокой динамики и минимального отношения сигнал/шум, при котором сохраняется слежение за фазой в условиях высокой динамики.

#### ***Характеристики МАССФ при воздействии только динамики опорного генератора.***

Проведём сравнение **точности** оценки фазы в МАССФ и РФК, оптимальном для низкой динамики и отношения с/ш.

РФК оптимален для отношения с/ш 15 дБГц. Оптимальное значение параметра интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы для РФК в условиях низкой динамики:  $\alpha_{\text{РФК}} = 0.01 \text{ м/с}^2$ . МАССФ в процессе адаптации оценивает параметр интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы и отношение с/ш.

МАССФ и РФК работали по одной и той же реализации наблюдений  $Y$ . Это означает, что сравнение проводилось при одних и тех же реализациях процесса фазы и шумов наблюдений. Отношение с/ш равно 15 дБГц. Результаты представлены на рисунке 7 в виде графиков реализаций ошибок оценок фазы. СКО ошибки оценки фазы в РФК составила **0.390 рад**. СКО ошибки оценка фазы в МАССФ составила **0.398 рад**.

Из представленных результатов видно, что МАССФ, адаптируясь как под динамику процесса фазы, так и под отношение с/ш, не значительно уступает в точности оценки фазы алгоритму РФК, который оптимален для заданной динамики процесса фазы и отношения с/ш. Проигрыш в точности можно объяснить действием алгоритма адаптации.

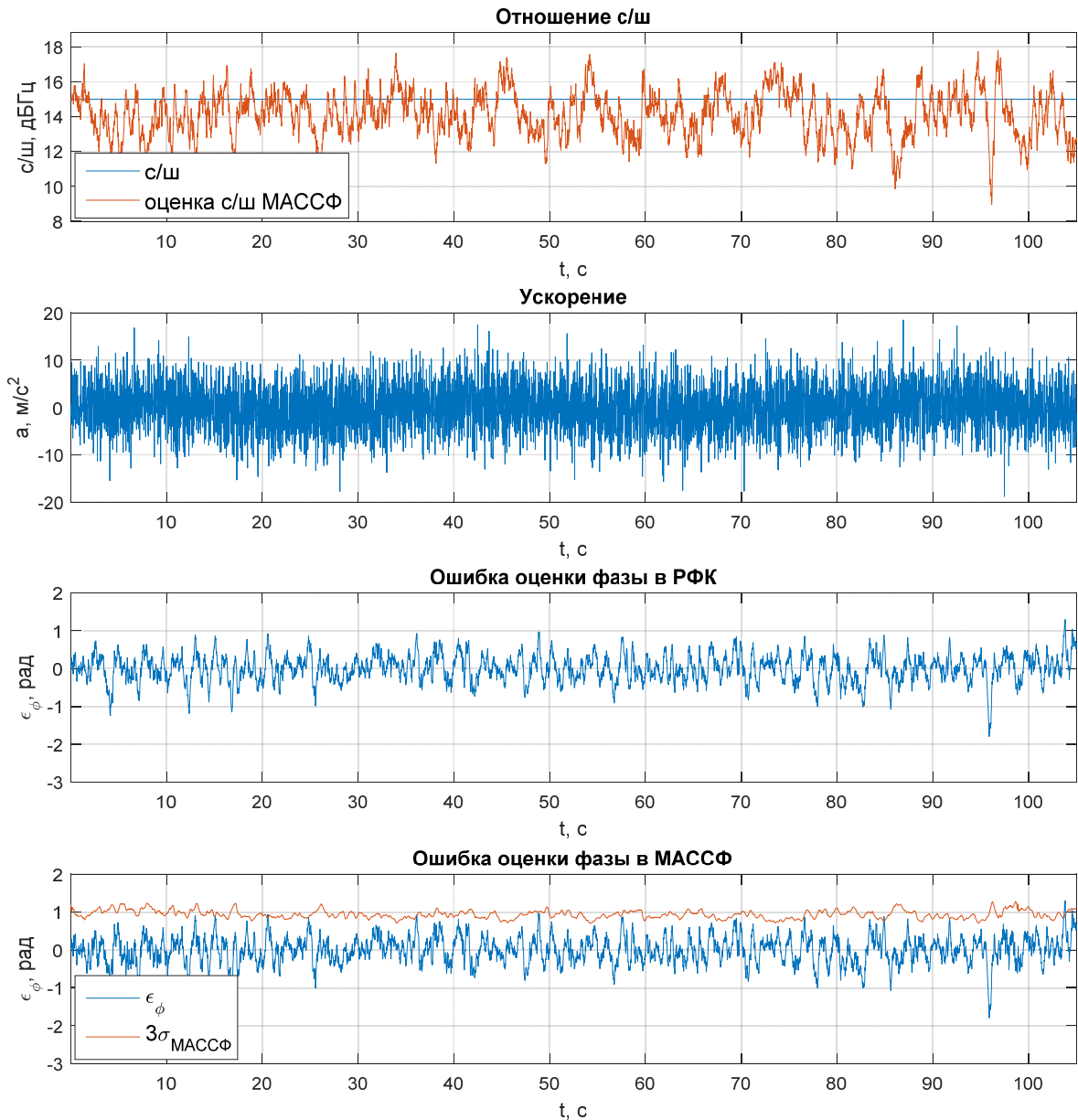


Рисунок 7. Результаты исследования точности МАССФ и РФК, оптимального для низкой динамики и отношения с/ш, при воздействии только динамики опорного генератора

Сравним **чувствительность** слежения за фазой МАССФ и РФК, который оптимален для низкой динамики и отношения  $c/\text{ш}_{\min}$ .

Необходимо определить минимальное отношение сигнал/шум при котором за 100 секунд слежения происходит не более 1-го срыва слежения за фазой с вероятностью 0.5. Для этого набрана статистика из 100 реализаций ошибок оценок фазы. Для каждой реализации отношение с/ш первые 5 секунд задается 15 дБГц, далее резко снижается до  $c/\text{ш}_{\min}$  и остается на этом уровне 100 секунд. В конце реализации принимается решение о том, происходили ли срывы слежения за фазой или нет в течение последних 100 секунд. По 100 реализациям формируется вероятность срыва слежения за фазой.

В каждом эксперименте на вход МАССФ и РФК подавалась одна и та же реализация наблюдений  $Y$ . От эксперимента к эксперименту реализации  $Y$  отличались только шумом наблюдений, а реализация процесса фазы оставалась неизменной. В таблице 2 представлены результаты, полученные при  $c/\text{ш}_{\min} = 8,9,10$  дБГц.

Таблица 2. Вероятность срыва фазы в МАССФ и РФК, оптимальном для низкой динамики и отношения  $c/\sigma_{\min}$ , при воздействии только динамики опорного генератора

$c/\sigma_{\min}$ , дБГц	Вероятность срыва фазы в МАССФ	Вероятность срыва фазы в РФК
10	0.31	0.17
9	0.47	0.42
8	0.73	0.64

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что **чувствительность** слежения за фазой в условиях динамики опорного генератора составила около **9 дБГц** как для МАССФ так и для РФК, оптимального для динамики процесса фазы и отношения  $c/\sigma_{\min}$ . Причем вероятность срыва МАССФ при 9 дБГц оказывается несколько выше. Некоторый проигрыш в чувствительности МАССФ можно объяснить действием алгоритма адаптации.

**Характеристик МАССФ при воздействии синусоидального ускорения 10g и синусоидального рывка 10 g/s**

Проведём сравнение **точности** оценки фазы в МАССФ и РФК, оптимальном для динамики процесса фазы и отношения  $c/\sigma$ .

РФК оптимален для отношения  $c/\sigma$  25 дБГц. Оптимальное значение параметра интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы для РФК в условиях высокой динамики фазы:  $\alpha_{\text{РФК}} = 33.5 \text{ м/с}^2$ . МАССФ в процессе адаптации оценивает параметр интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы  $\alpha$  и отношение  $c/\sigma$   $q$ .

МАССФ и РФК работали по одной и той же реализации наблюдений  $Y$ . Это означает, что сравнение проводилось при одних и тех же реализациях процесса фазы и шумов наблюдений. Результаты представлены на рисунке 8 в виде графиков реализаций ошибок оценок фазы. СКО ошибки оценки фазы в РФК составила **0.208 рад**. СКО ошибки оценка фазы в МАССФ составила **0.204 рад**.

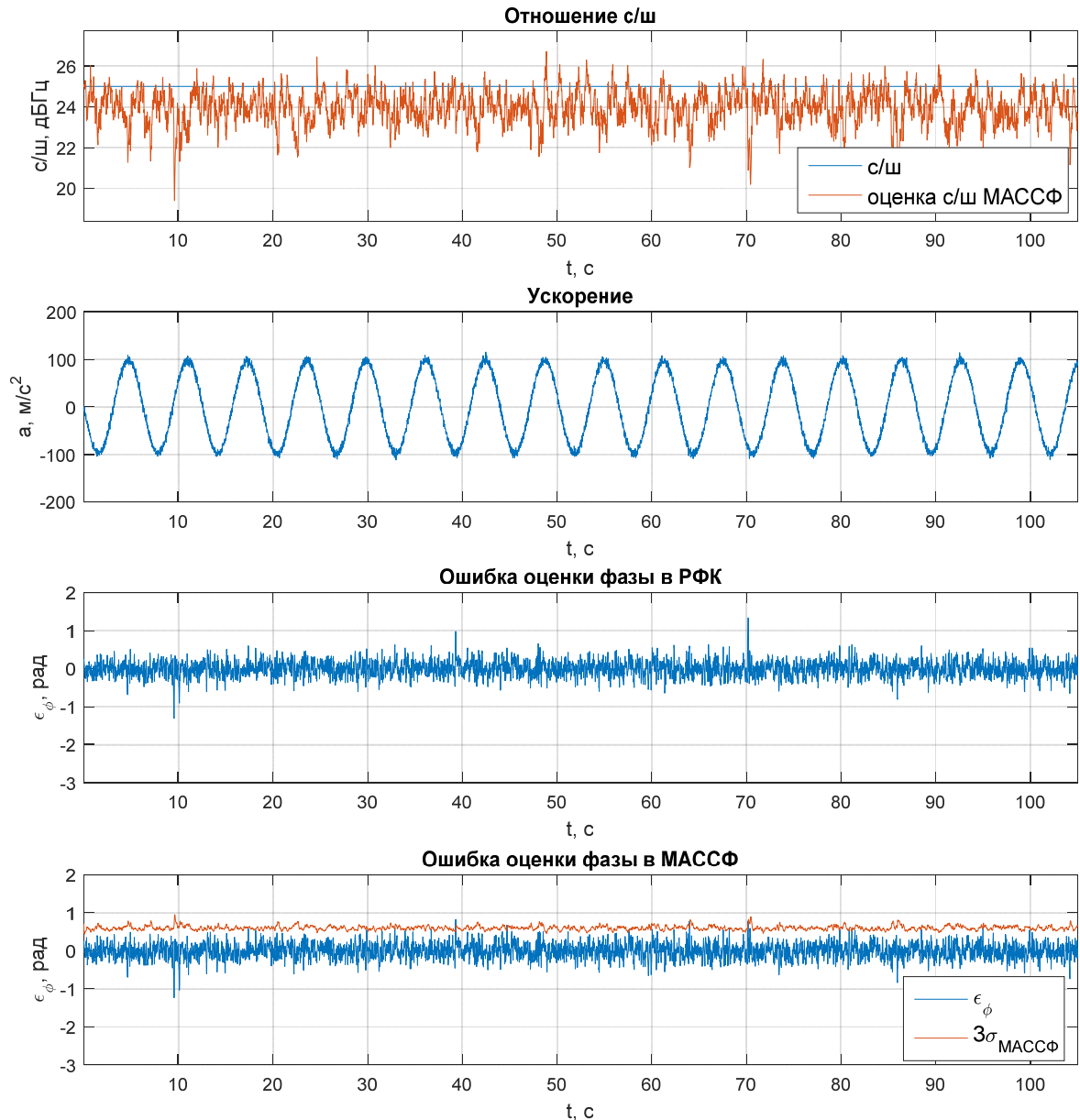


Рисунок 8 Результаты исследования точности МАССФ и РФК, оптимального для высокой динамики и отношения  $c/\omega$ , при воздействии, динамики опорного генератора, синусоидального ускорения  $10g$  и синусоидального рывка  $10g/s$

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что точность оценки фазы МАССФ несколько превосходит точность оценки фазы РФК, оптимального для данного средне-квадратического ускорения и отношения  $c/\omega$ . Такой результат обусловлен тем, что выбранное динамическое воздействие не является по характеру марковским и не соответствует модели сообщения (2), что делает алгоритм РФК не оптимальным для заданных условий. Этот шаг был сделан намеренно, поскольку движение реальных объектов также не является марковским процессом, что, как видно, приводит к увеличению ошибки в РФК. В МАССФ каналные фильтры также не являются оптимальными для данных динамических условий, однако за счет адаптивного взвешивания оценок из нескольких каналов удастся уменьшить общую ошибку оценки фазы.

Сравним чувствительность слежения за фазой в МАССФ и РФК, который оптимален для высокой динамики и отношения  $c/\omega_{\min}$ .

Сравнение чувствительности проводилось по тому же методу, что и при воздействии только динамики опорного генератора. Для каждой реализации отношение  $c/\omega$  первые 5 секунд задается 25 дБГц, далее резко снижается до  $c/\omega_{\min}$  и остается на этом уровне 100 секунд.

В таблице 3 представлены результаты, полученные при  $c/\omega_{\min} = 23,24,25$  дБГц.

Таблица 3. Вероятность срыва фазы в МАССФ и РФК, оптимальном для высокой динамики и отношения  $c/\omega_{\min}$ , при воздействии высокой динамики

$c/\omega_{\min}$ , дБГц	Вероятность срыва фазы в МАССФ	Вероятность срыва фазы в РФК
25	0.10	0.16
24	0.41	0.63
23	0.89	0.98

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что **чувствительность** слежения за фазой в условиях динамики опорного генератора, синусоидального ускорения 10g и синусоидального рывка 10 g/s составила около **24 дБГц** для МАССФ и между **24 и 25 дБГц** для РФК, оптимального для динамики процесса фазы и отношения  $c/\omega_{\min}$ . Такой результат обусловлен теми же причинами, что увеличение ошибок в РФК по сравнению с МАССФ в предыдущем эксперименте. Немарковское динамическое воздействие приводит к большей деградации характеристик в не адаптивной системе, чем в адаптивной. С другой стороны, в МАССФ удается избежать срывов фазы за счет реализованной возможности выбрать наиболее надежную оценку. Так, в процессе исследования часто наблюдались ситуации, когда в РФК происходил срыв слежения, а в МАССФ в этот же момент времени всего лишь происходил переход на оценку из соседнего (по категории динамики) канала, что позволяло избежать срыва фазы.

**Сравнение работы МАССФ и РФК в нестационарных условиях**

В условиях скачкообразно изменяющегося СКО ускорения фазы и отношения  $c/\omega$ , производится сравнение работы:

- МАССФ;
- РФК, оптимального для высокой динамики ( $\alpha_{\text{РФК}} = 33.5 \text{ м/с}^2$ ) и отношения  $c/\omega$  24 дБГц;
- РФК, оптимального для низкой динамики ( $\alpha_{\text{РФК}} = 0.01 \text{ м/с}^2$ ) и отношения  $c/\omega$  9 дБГц.

Сценарий изменения параметров СКО ускорения фазы и отношения  $c/\omega$  представлен в табл. 4.

Таблица 4. Сценарий изменения отношения  $c/\omega$  и СКО ускорения фазы

Время	Динамика	Отношение $c/\omega$
0-2 сек	Низкая динамика	50 дБГц
2-12 сек		9 дБГц
12-14 сек		50 дБГц
14-15 сек		24 дБГц
15-25 сек	Высокая динамика	24 дБГц
25-26 сек		50 дБГц
26-34 сек		24 дБГц
34-37 сек	Низкая динамика	24 дБГц
37-41 сек		9 дБГц

Результаты работы МАССФ представлены на рисунке 9 в виде графиков реализаций ошибок оценок фазы. Видно, что в МАССФ удалось сохранить слежение за фазой в условиях скачкообразно изменяющегося СКО ускорения фазы и отношения  $c/\omega$ .

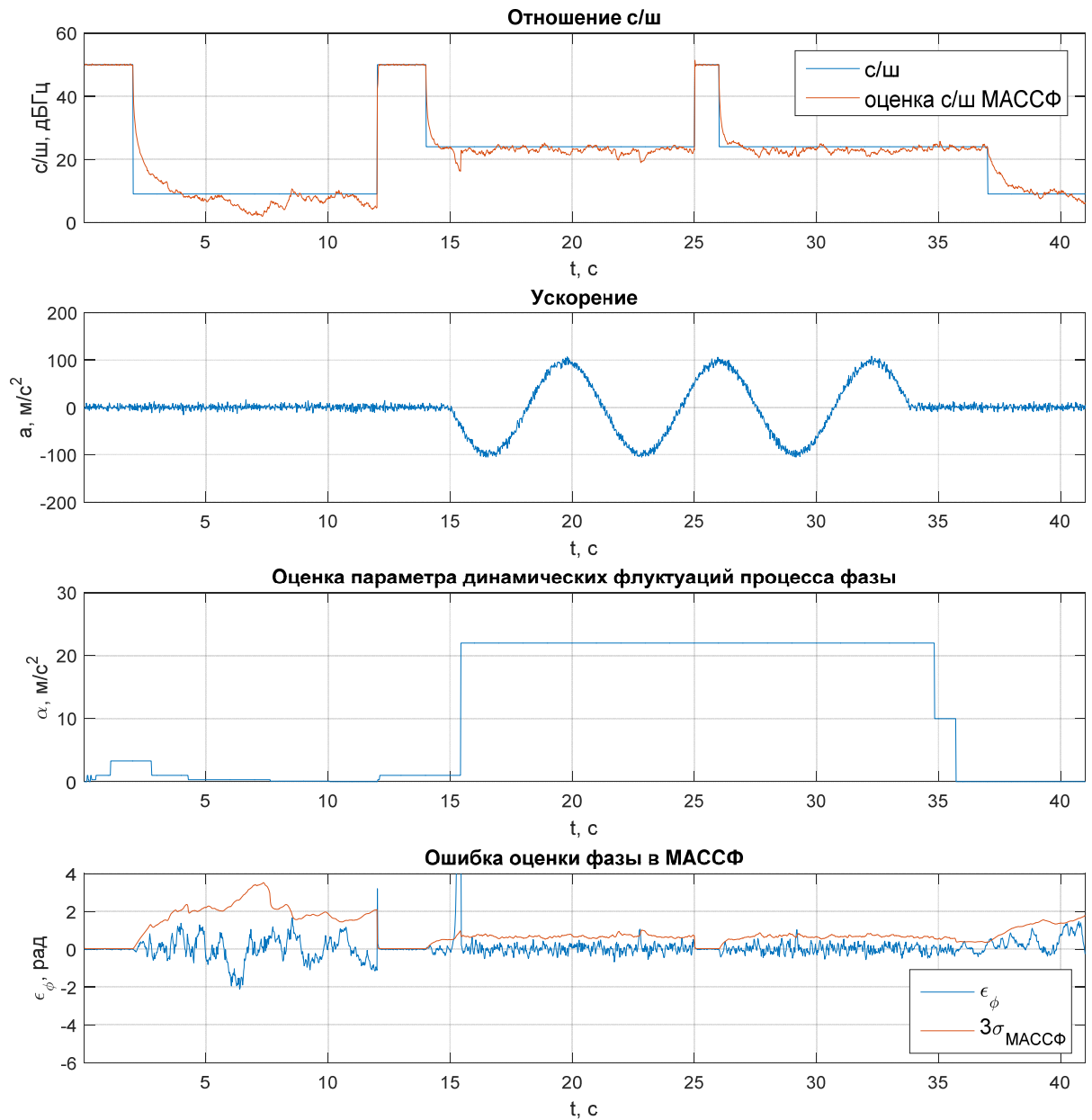


Рисунок 9. Результаты работы МАССФ в нестационарных условиях

Результаты работы РФК, оптимального для низкой динамики процесса фазы и отношения с/ш 9 дБГц, представлены на рисунке 10 в виде графиков реализаций ошибок оценок фазы. На моменте начала динамики в РФК произошел срыв слежения за фазой. Слежение было восстановлено после окончания динамического участка.

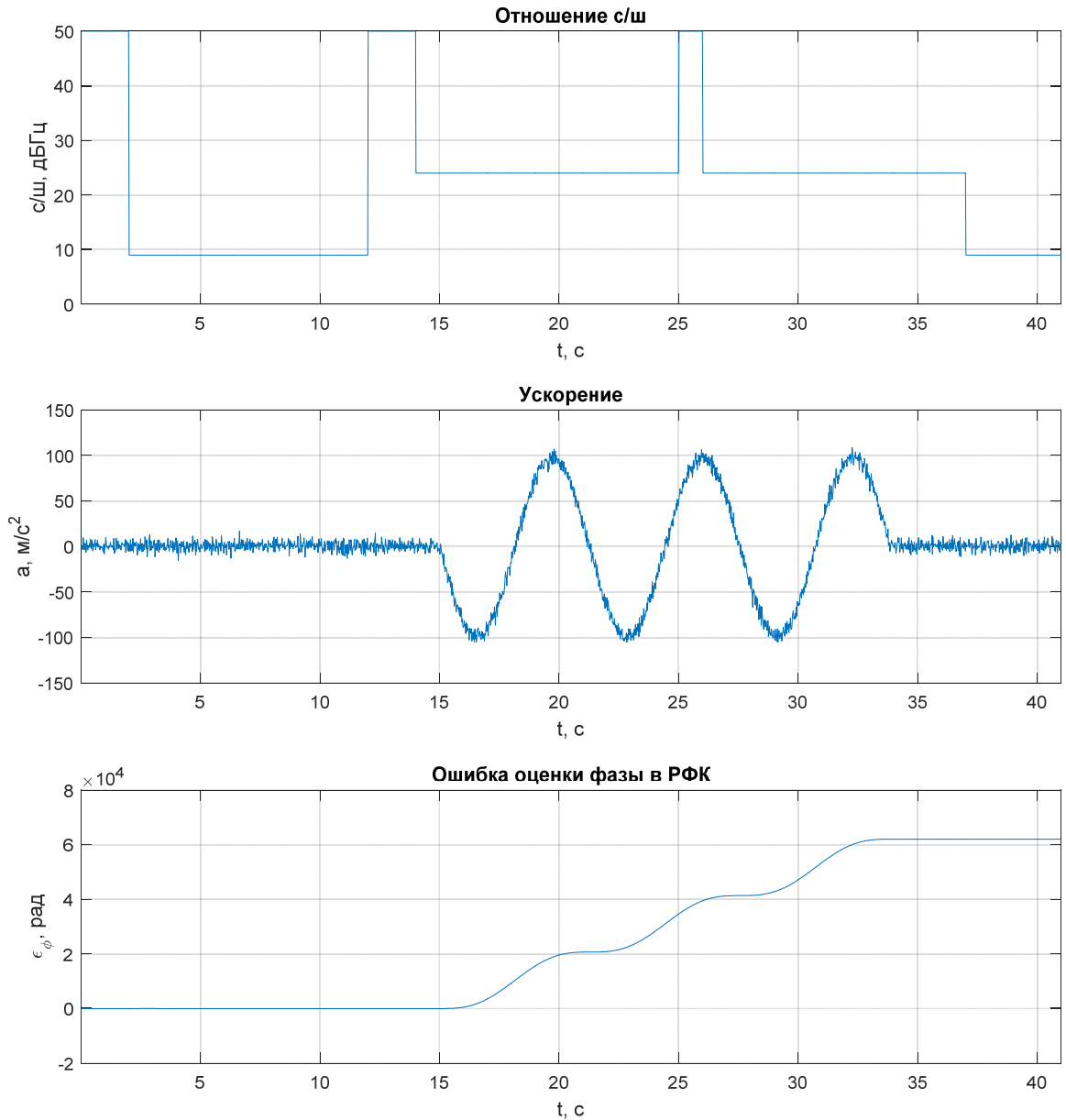


Рисунок 10. Результаты работы РФК, оптимального для низкой динамики и отношения с/ш 9 дБГц, в нестационарных условиях

Результаты работы РФК, оптимального для высокой динамики и отношения с/ш 24 дБГц, представлены на рисунке 11 в виде графиков реализаций ошибок оценок фазы. При падении отношения с/ш до 10 дБГц в РФК произошел срыв слежения за фазой без дальнейшего восстановления слежения.

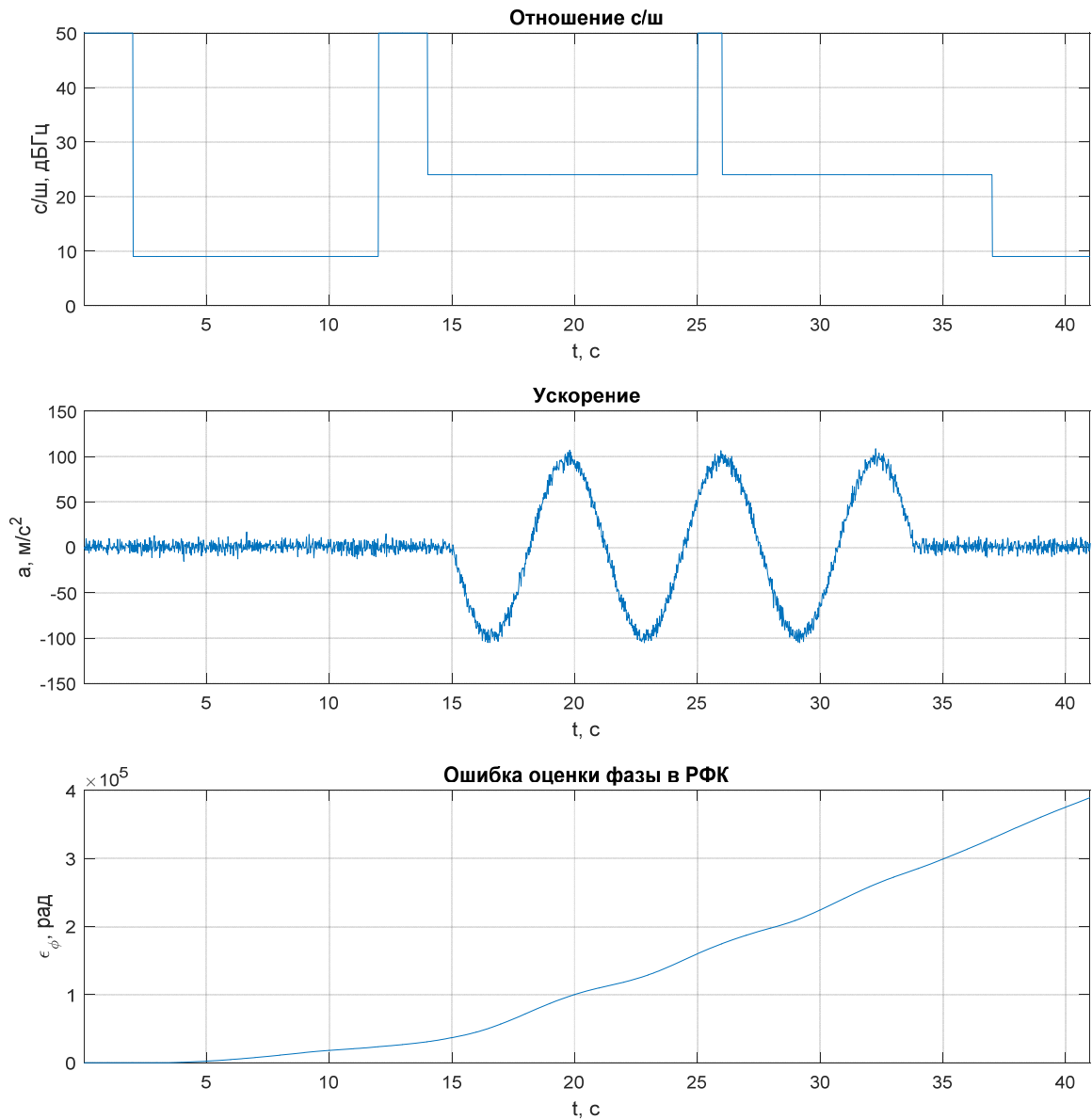


Рисунок 11. Результаты работы РФК, оптимального для высокой динамики и отношения с/ш 24 дБГц, в нестационарных условиях

Из представленных на рисунках 9-11 результатов можно сделать вывод о том, что в представленном сценарии слежение за фазой сохранилось только в МАССФ, а РФК, настроенные на фиксированную динамику и отношение с/ш оказались неработоспособны.

#### Выводы

МАССФ способна обрабатывать скачок отношения сигнал/шум с 50 до 9 дБГц и обратно без потери слежения за фазой (в условиях низкой динамики).

МАССФ способна сохранять слежение за фазой при скачкообразных переходах динамики между низкой (обусловленной только динамикой опорного генератора) и высокой (синусоидальное ускорение амплитудой 10g и синусоидальный рывок амплитудой 10 g/s) при отношении сигнал/шум 24 дБГц.

В условиях динамики опорного генератора точность оценки фазы в МАССФ не значительно (менее 2.5 %) уступает точности оценки фазы в РФК, оптимальном для отношения с/ш и динамики процесса фазы, обусловленного динамикой опорного генератора. Чувствительность слежения за фазой для МАССФ в условиях динамики только опорного генератора составила около **9 дБГц**, что также не значительно (**менее 1 дБ**) уступает чувствительности РФК, оптимального для заданных динамических условий и отношения с/ш.

В условиях высокой динамики точность оценки фазы в МАССФ не значительно (менее 2 %) превосходит точность оценки фазы в РФК, оптимальном для заданных параметров динамики и отношения с/ш. Чувствительность слежения за фазой для МАССФ в условиях высокой динамики



с синусоидальным ускорением  $10g$  и синусоидальным рывком  $10 g/s$  составила около **24 дБГц**. Для РФК, оптимального для отношения с/ш и заданных динамических условий, чувствительность составила между **24 и 25 дБГц**.

В условиях высокой динамики, выигрыш в чувствительности и точности МАССФ объясняется тем, что динамическое воздействие не является марковским и не соответствует модели сообщения (2), что делает алгоритм РФК не оптимальным для заданных условий. Хотя в МАССФ каналные фильтры также не являются оптимальными для данных динамических условий, за счет адаптивного взвешивания оценок из нескольких каналов удастся уменьшить общую ошибку оценки фазы. Другими словами, в МАССФ удастся избежать срывов фазы за счет реализованной возможности выбрать наиболее надежную оценку. Так, в процессе исследования часто наблюдались ситуации, когда в РФК происходил срыв слежения, а в МАССФ в этот же момент времени всего лишь происходил переход на оценку из соседнего (по категории динамики) канала, что позволяло избежать срыва фазы.

Таким образом, в реальных условиях, когда динамика объекта и отношения с/ш принимаемых сигналов меняются непредсказуемым образом, МАССФ сохраняет слежение за фазой в гораздо более широком диапазоне условий, чем неадаптивная ССФ.

### Список источников

1. Перов. А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Радиотехника, 2022. - 840 с.
2. Перов А. И., Замолотчиков В. Н., Чиликин В. М. Радиоавтоматика: Учебник для вузов. \_ М.: Радиотехника, 2014. – 320 с.
3. Understanding GPS: Principles and Applications/ Ed. by E.D. Kaplan.— С. 86-92.Artech House, Inc., Norwood, Massachusetts, 1996
4. Шатилов А.Ю. Использование критерия срыва слежения при оценке помехоустойчивости следящих систем. // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2010. — № 11. — С. 25-33.
5. Шатилов, А. Ю. Исследование кратковременных нестабильностей кварцевых опорных генераторов для применения в НАП // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2013. — № 3. — С. 86-92.
6. Jong-Hoon Won and Bernd Eissfeller. A Tuning Method Based on Signal-to-Noise Power Ratio for Adaptive PLL and its Relationship with Equivalent Noise Bandwidth. IEEE Communications Letters, VOL. 17, NO. 2, FEBRUARY 2013, pp 393-396.
7. Jong-Hoon Won. A Novel Adaptive Digital Phase-Lock-Loop for Modern Digital GNSS Receivers. IEEE Communications Letters, VOL. 18, NO. 1, JANUARY 2014, pp. 46-49.
8. Dah-Jing Jwo and Sheng-Hung Wang. Adaptive Fuzzy Strong Tracking Extended Kalman Filtering for GPS Navigation. IEEE Sensors Journal, VOL. 7, NO. 5, MAY 2007, pp 778-789.
9. Jordi Vilà-Valls, Pau Closas, Carles Fernández-Prades, Jose A. López-Salcedo, and Gonzalo Seco-Granados. Adaptive GNSS Carrier Tracking Under Ionospheric Scintillation: Estimation vs. Mitigation. IEEE Communications letters, VOL. 19, NO. 6, JUNE 2015, pp 961-964
10. Emanuela Falletti, Marco Pini, Letizia Lo Presti. Low Complexity Carrier-to-Noise Ratio Estimators for GNSS Digital Receivers. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems VOL. 47, NO. 1 JANUARY 2011, pp. 420-437.

### Информация об авторах

**Шатилов Александр Юрьевич** – к.т.н., доцент, начальник отделения БТ.

SPIN-код: не представлен

**Черкасова Анастасия Алексеевна** – инженер-программист 2 кат.

SPIN-код: не представлен

Original article

Adaptive phase lock loop system for global navigation satellite systems signals

A.A. Cherkasova<sup>1</sup>, A.Y. Shatilov<sup>2</sup>

<sup>1-2</sup> National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow, Russia)

<sup>1</sup> PotrikeeveAA@mpei.ru <sup>2</sup> ShatilovAY@mpei.ru

**Abstract**

**Formulation of the problem.** Classical optimal Bayesian phase lock loop (PLL) algorithms require a priori knowledge of the phase dynamics parameters and signal-to-noise ratios of the received signals. In practice, these parameters vary significantly and, as a rule, are unknown. Taking into account the fact that the operation of such algorithms under conditions different from those a priori specified is not reliable according to the criterion of minimum variance error.

**Purpose of the study.** Develop a phase-locked loop system for the Global Navigation Satellite System (GNSS) signal that adapts to phase dynamics and signal-to-noise ratio to maintain phase tracking over the widest possible range of operating conditions.

**Results.** A multi-channel adaptive phase-locked loop system (MAPLL system) has been developed.

**Practical significance.** The developed system is capable of processing a jump in the signal-to-noise ratio from 50 to 9 dBHz and back without losing phase tracking (under conditions of low dynamics), maintaining phase tracking during abrupt transitions of dynamics between low (due only to the dynamics of the reference oscillator) and high (sinusoidal acceleration 10g and sinusoidal jerk 10g/s) at a signal-to-noise ratio of 24 dBHz. Thus, in real-world conditions where object dynamics and S/N ratios of received signals change in unpredictable ways, MAPLL system maintains phase tracking over a much wider range of conditions than non-adaptive PLL.

**Keywords**

Adaptive phase lock loop system, adaptive approach, phase tracking of global navigation systems signals, adaptive phase tracking system.

**References**

1. Перов. А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Радиотехника, 2022. - 840 с.
2. Перов А. И., Замолотчиков В. Н., Чиликин В. М. Радиоавтоматика: Учебник для вузов. \_ М.: Радиотехника, 2014. – 320 с.
3. Understanding GPS: Principles and Applications/ Ed. by E.D. Kaplan.— С. 86-92.Artech House, Inc., Norwood, Massachusetts, 1996
4. Шатилов А.Ю. Использование критерия срыва слежения при оценке помехоустойчивости следящих систем. // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2010. — № 11. — С. 25-33.
5. Шатилов, А. Ю. Исследование кратковременных нестабильностей кварцевых опорных генераторов для применения в НАП // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2013. — № 3. — С. 86-92.
6. Jong-Hoon Won and Bernd Eissfeller. A Tuning Method Based on Signal-to-Noise Power Ratio for Adaptive PLL and its Relationship with Equivalent Noise Bandwidth. IEEE Communications Letters, VOL. 17, NO. 2, FEBRUARY 2013, pp 393-396.
7. Jong-Hoon Won. A Novel Adaptive Digital Phase-Lock-Loop for Modern Digital GNSS Receivers. IEEE Communications Letters, VOL. 18, NO. 1, JANUARY 2014, pp. 46-49.
8. Dah-Jing Jwo and Sheng-Hung Wang. Adaptive Fuzzy Strong Tracking Extended Kalman Filtering for GPS Navigation. IEEE Sensors Journal, VOL. 7, NO. 5, MAY 2007, pp 778-789.
9. Jordi Vilà-Valls, Pau Closas, Carles Fernández-Prades, Jose A. López-Salcedo, and Gonzalo Seco-Granados. Adaptive GNSS Carrier Tracking Under Ionospheric Scintillation: Estimation vs. Mitigation. IEEE Communications letters, VOL. 19, NO. 6, JUNE 2015, pp 961-964
10. Emanuela Falletti, Marco Pini, Letizia Lo Presti. Low Complexity Carrier-to-Noise Ratio Estimators for GNSS Digital Receivers. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems VOL. 47, NO. 1 JANUARY 2011, pp. 420-437.

**Information about the authors**

**Alexander Y. Shatilov** – Ph.D.(Eng), assistant professor, BT Department Director.

**SPIN-код:** unknown

**Anastasia A. Cherkasova** – software engineer.

**SPIN-код:** unknown