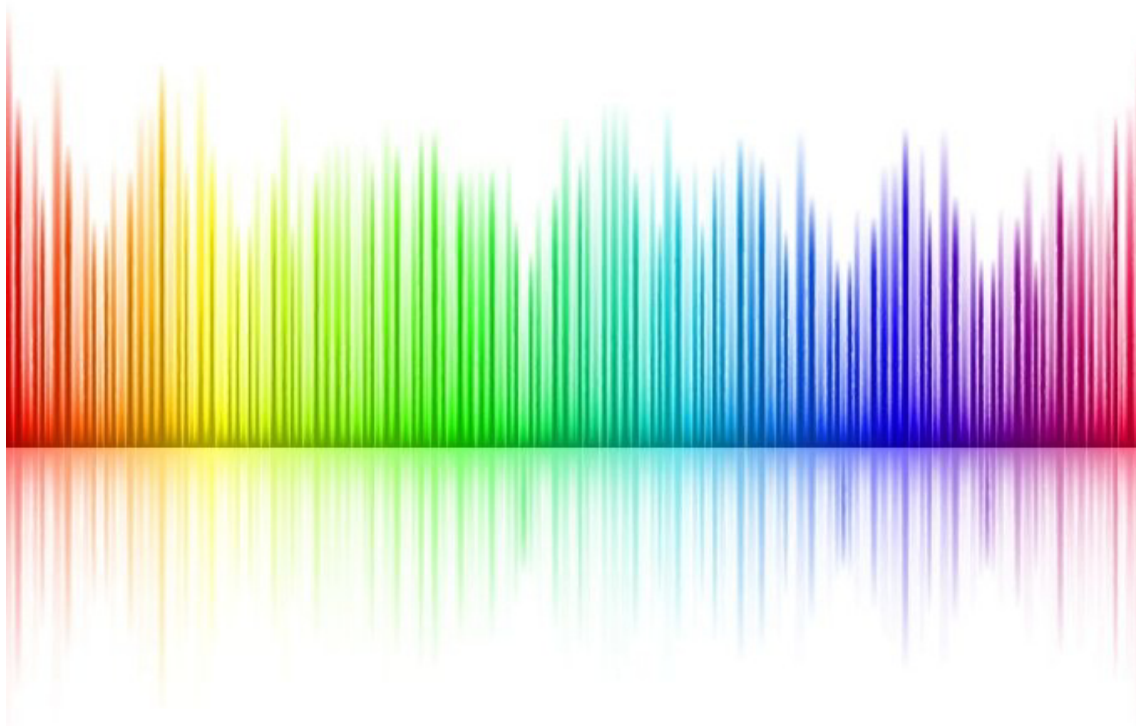


Математическое моделирование РТУ и С

Лекция 5. Представление процессов в частотной области

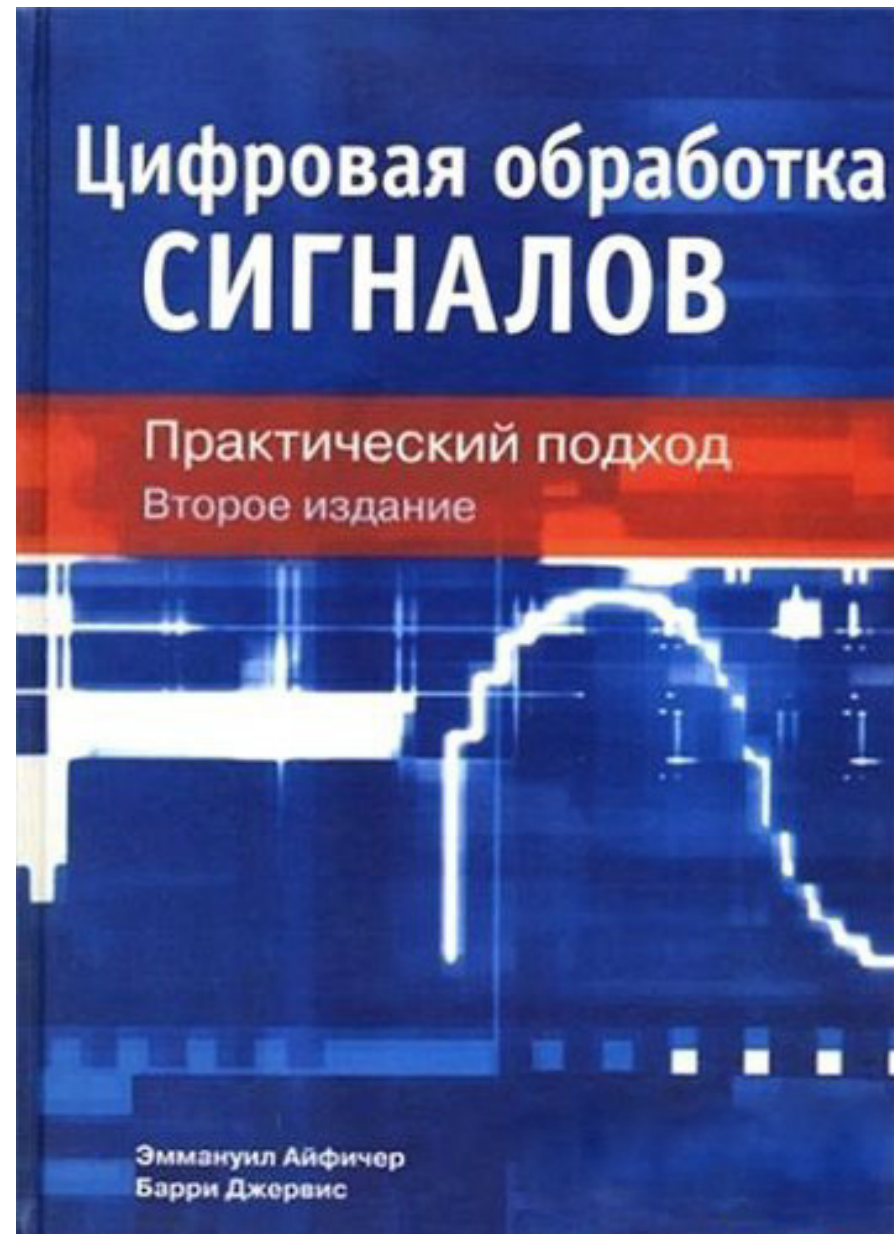


Преподаватель:
Корогодин Илья
korogodin@srns.ru

Литература

Айфичер Э., Джервис Б. -
Цифровая обработка
сигналов: практический
подход / Digital Signal
Processing: A Practical
Approach, 2004

Глава 3. Дискретные
преобразования



Литература

Ричард Лайонс - Цифровая обработка сигналов /
Understanding Digital Signal Processing, 2006

Глава 3. Дискретное преобразование Фурье

Глава 4. Быстрое преобразование Фурье



Векторное пространство



Координаты вектора

$$x_r = \vec{r} \cdot \vec{k}_x =$$

$$= |\vec{r}| \cdot |\vec{k}_x| \cdot \cos(\alpha_x)$$

$$y_r = \vec{r} \cdot \vec{k}_y =$$

$$= |\vec{r}| \cdot |\vec{k}_y| \cdot \cos(\alpha_y)$$

Вектор из координат

$$\vec{r} = x_r \vec{k}_x + y_r \vec{k}_y$$

Для функций
скалярное
произведение:

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt$$

Преобразование Фурье – это расчет
координат функции в базисе

$$k_\omega(t) = e^{j\omega t}$$

Координаты вектора

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

Вектор из координат

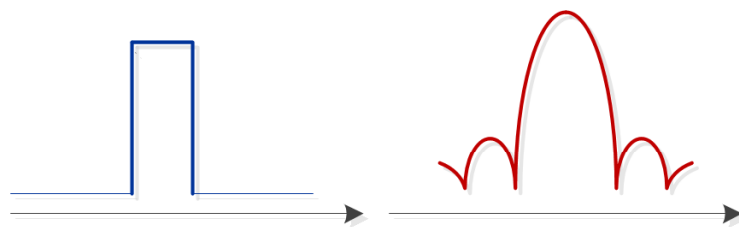
$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Преобразование Фурье

Непрерывное время
(непериодический спектр)

Дискретное время
(периодический спектр)

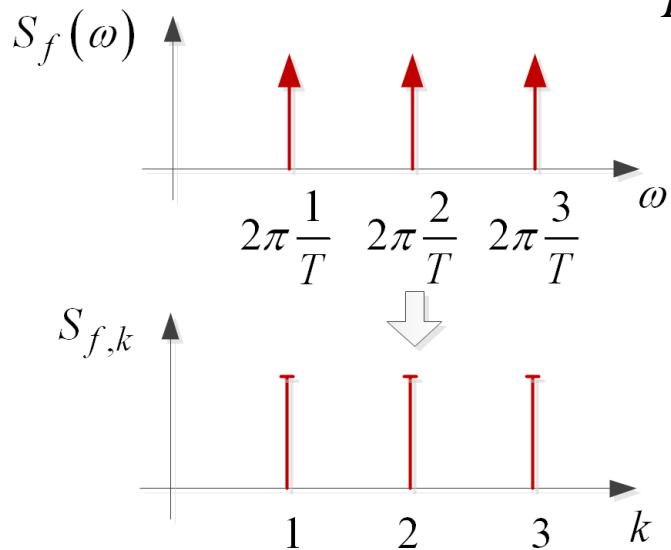
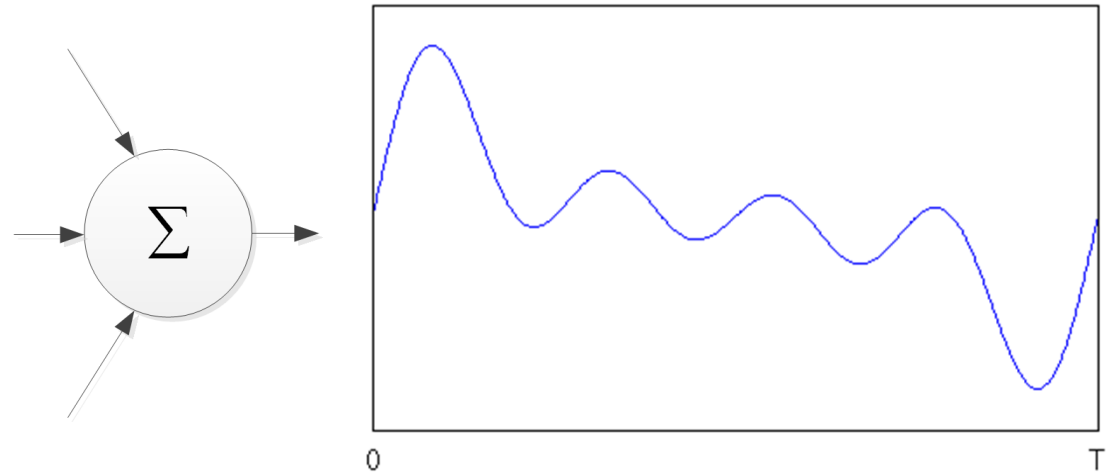
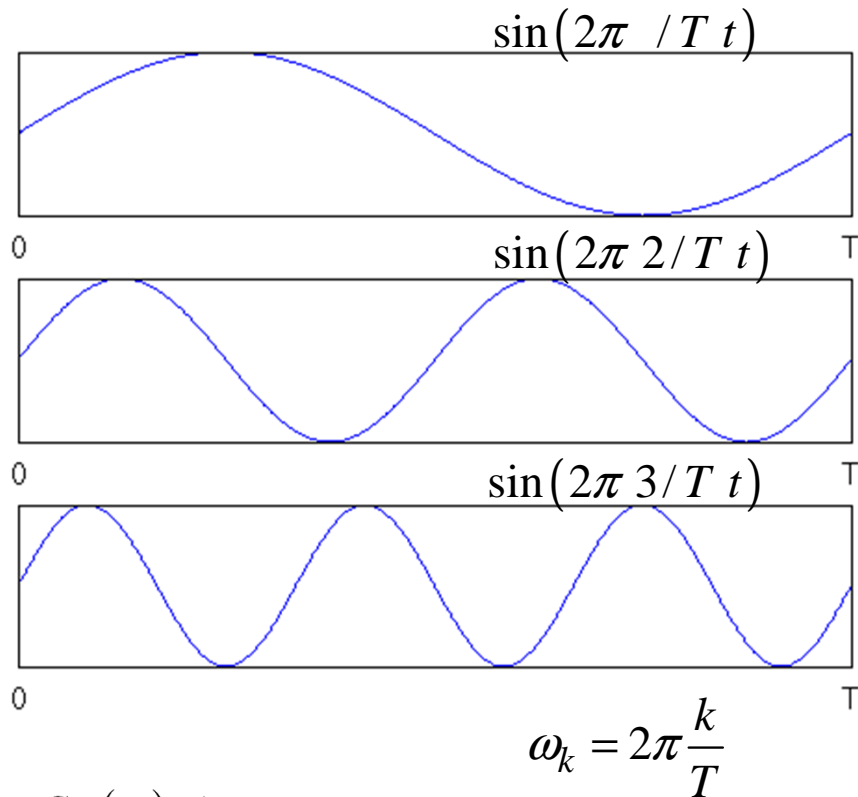
Непрерывная частота
(непериодический сигнал)



$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Дискретная частота
(периодический сигнал)

Ряд Фурье



$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{C_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f,k} \delta(\omega - \omega_k) e^{j\omega t} d\omega = \frac{C_1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{f,k} e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \sim S_{f,k} = C_2 \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

Àñèè $S(t) = 1 \cdot e^{j\omega_k t}$, ò ì

$$C_1 = 2\pi,$$

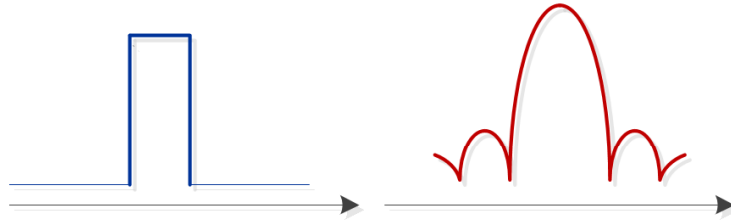
$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\omega_k t} e^{-j\omega_k t} dt = T \Rightarrow C_2 = \frac{1}{T}$$

Преобразование Фурье

Непрерывное время
(непериодический спектр)

Дискретное время
(периодический спектр)

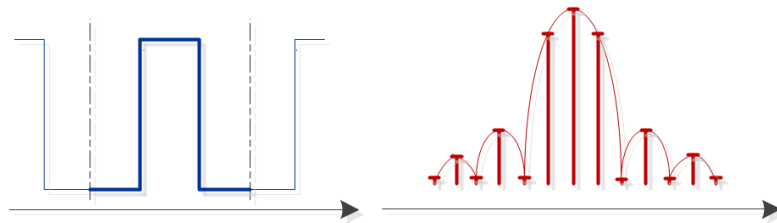
Непрерывная частота
(непериодический сигнал)



$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Дискретная частота
(периодический сигнал)

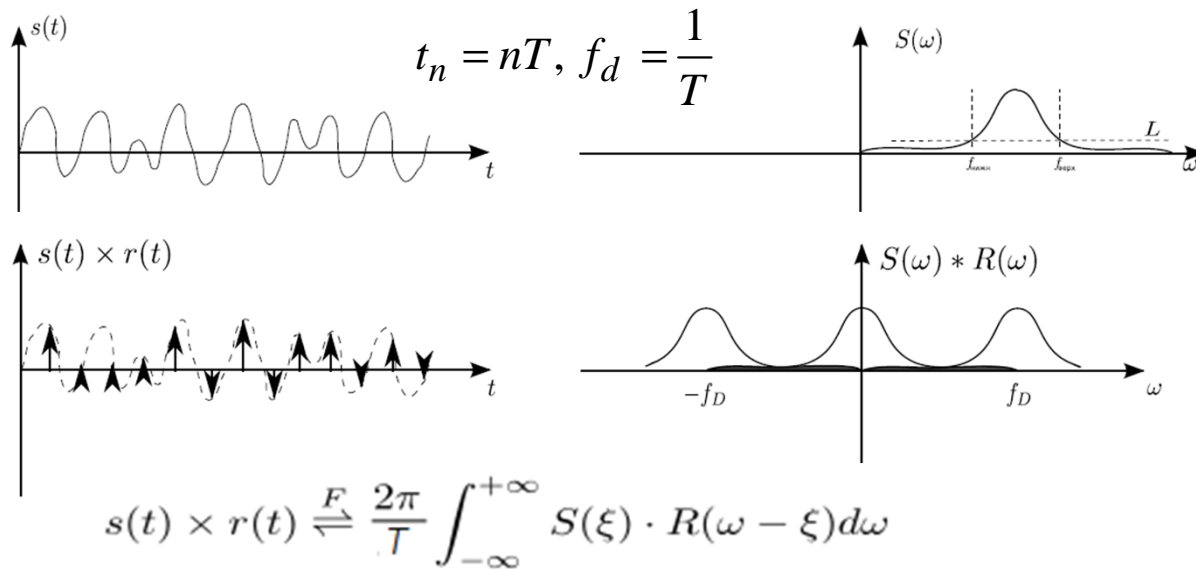


Ряд Фурье (Fourier series):

$$S_{f,k} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{f,k} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

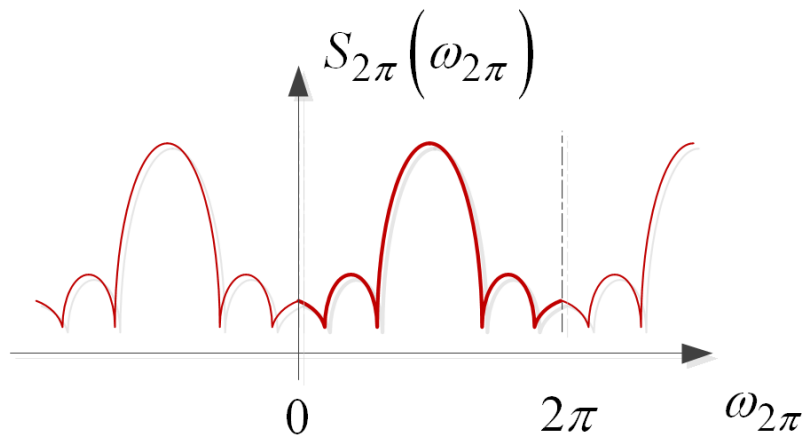
Дискретное по времени ПФ (DTFT)



$$\begin{aligned}
 S_f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n \delta(t - t_n) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j\omega n T}
 \end{aligned}$$

Чаще рассматривают только один период и нормированную частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow S_f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j2\pi \frac{\omega}{\omega_d} n} \rightarrow S_{f,2\pi}(\omega_{2\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j\omega_{2\pi} n}, \quad \omega_{2\pi} \in [0; 2\pi)$$



Обратное преобразование по аналогии с вычислением коэффициентов ряда Фурье:

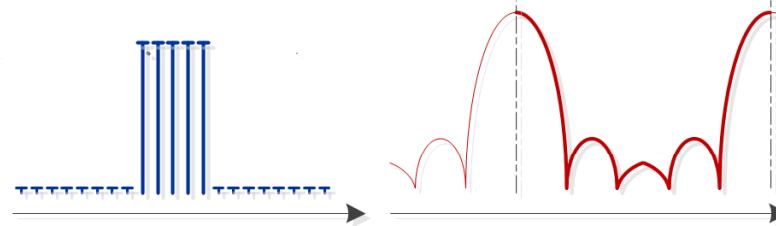
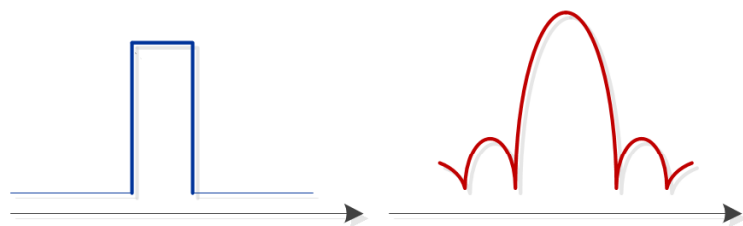
$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_f(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Преобразование Фурье

Непрерывное время
(непериодический спектр)

Дискретное время
(периодический спектр)

Непрерывная частота
(непериодический сигнал)



$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

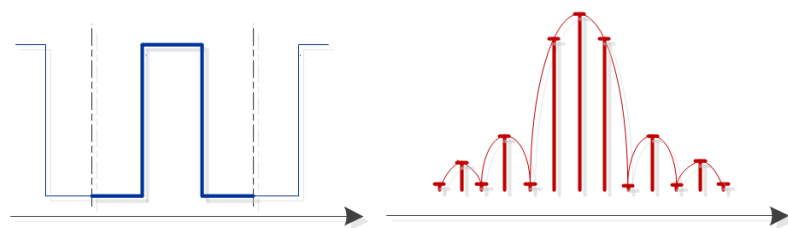
$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Discrete-time FT (DTFT):

$$S_f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j\omega n} \quad \omega \in [0; 2\pi)$$

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_f(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Дискретная частота
(периодический сигнал)

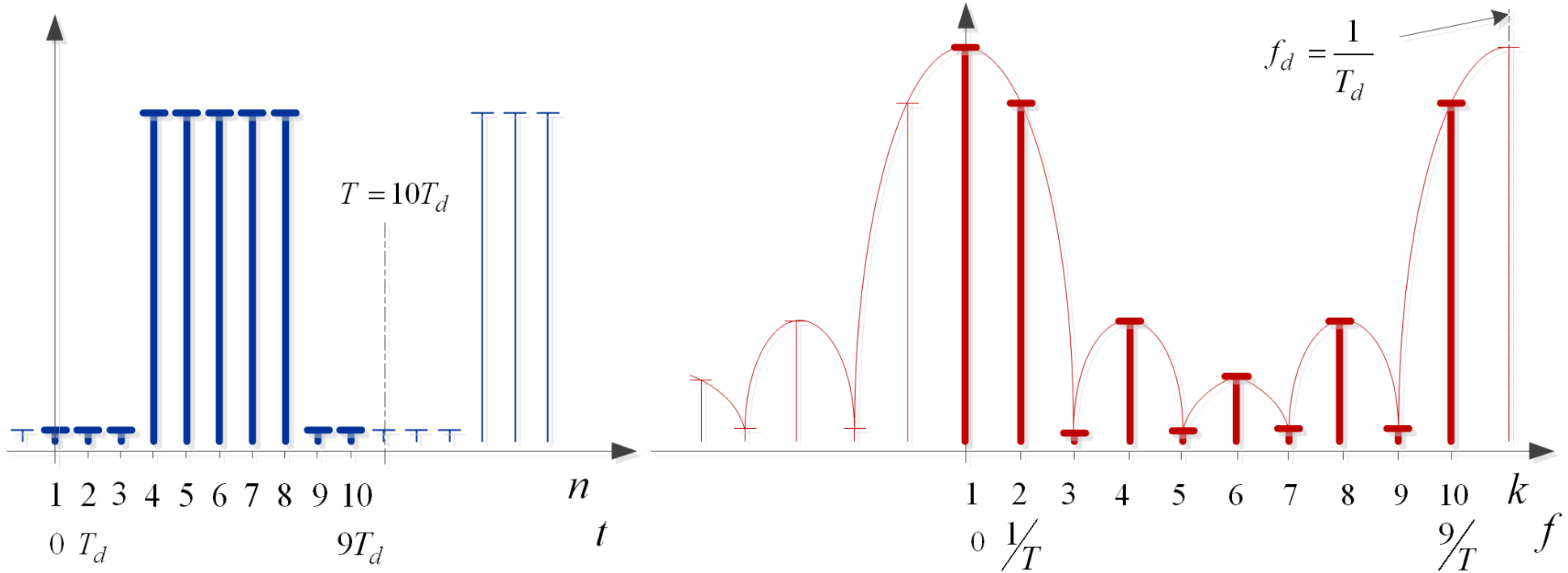


Ряд Фурье (Fourier series):

$$S_{f,k} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{f,k} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

Дискретное ПФ (DFT)

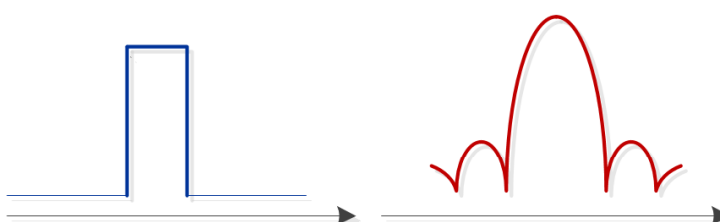
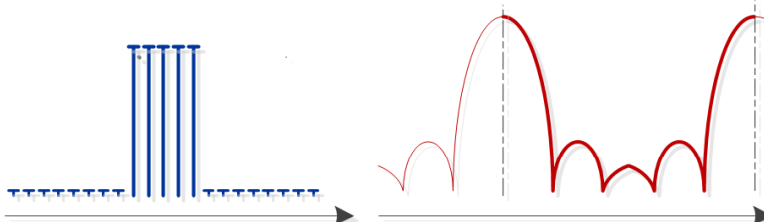
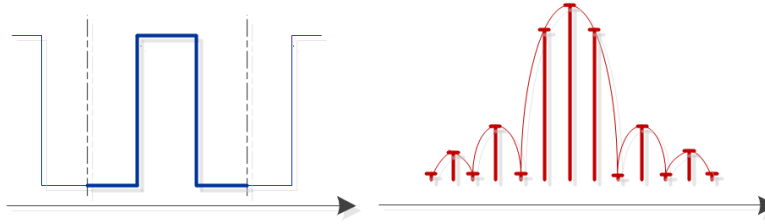
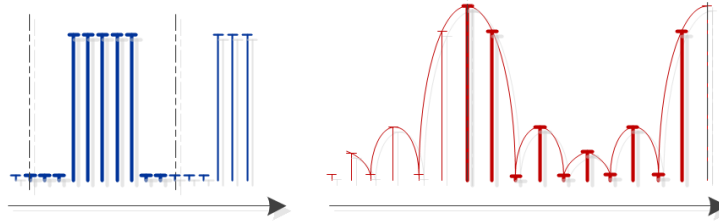


Период $T \Rightarrow$ шаг по частоте $\Delta f = \frac{1}{T} \Rightarrow$ Число отчетов N совпадает

$$\omega_{2\pi,k} = 2\pi \frac{(k-1)}{N}, \quad k = 1..N \Rightarrow S_{f,k} = \sum_{n=1}^N S_n e^{-j2\pi\omega_{2\pi}(n-1)} = \sum_{n=1}^N S_n e^{-j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}, \quad k = 1..N$$

Обратное:
$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{f,k} e^{j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}, \quad n = 1..N$$

Преобразование Фурье

	Непрерывное время (непериодический спектр)	Дискретное время (периодический спектр)
Непрерывная частота (непериодический сигнал)	 $S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$ $S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	 <p>Discrete-time FT (DTFT):</p> $S_f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{-j\omega n} \quad \omega \in [0; 2\pi)$ $S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_f(\omega) e^{j\omega n} d\omega$
Дискретная частота (периодический сигнал)	 <p>Ряд Фурье (Fourier series):</p> $S_{f,k} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$ $S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{f,k} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	 <p>Discrete FT (DFT)</p> $S_{f,k} = \sum_{n=1}^N S_n e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$ $S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k e^{j\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$

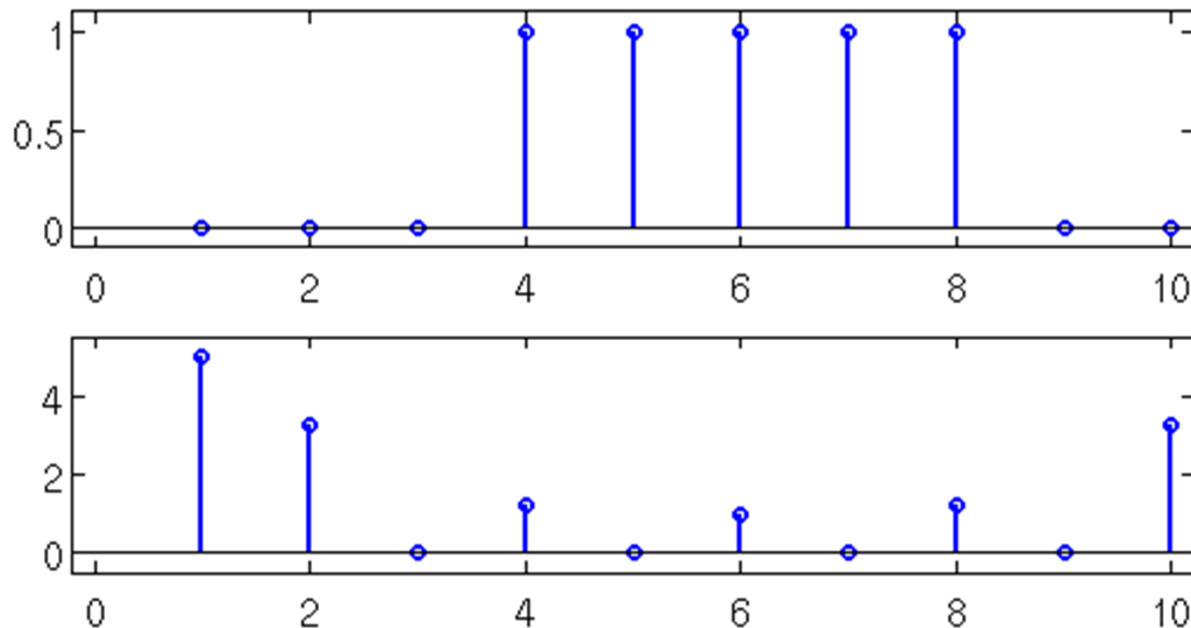
FFT в MATLAB

Fast Fourier Transform (FFT)

- реализация DFT, позволяющая снизить сложность вычислений

Результаты DFT и FFT **совпадают!**

```
S = [0 0 0 1 1 1 1 1 0 0];  
figure(1); subplot(2,1,1); stem(S);  
Sf = fft(S);  
subplot(2,1,2); stem(abs(Sf))
```



fft

Fast Fourier transform

Syntax

```
Y = fft(x)  
Y = fft(X,n)  
Y = fft(X,[],dim)  
Y = fft(X,n,dim)
```

Definitions

The functions $Y = \text{fft}(x)$ and $y = \text{ifft}(X)$ implement the transform and inverse transform pair given for vectors of length N by:

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) \omega_N^{(j-1)(k-1)}$$

$$x(j) = (1/N) \sum_{k=1}^N X(k) \omega_N^{-(j-1)(k-1)}$$

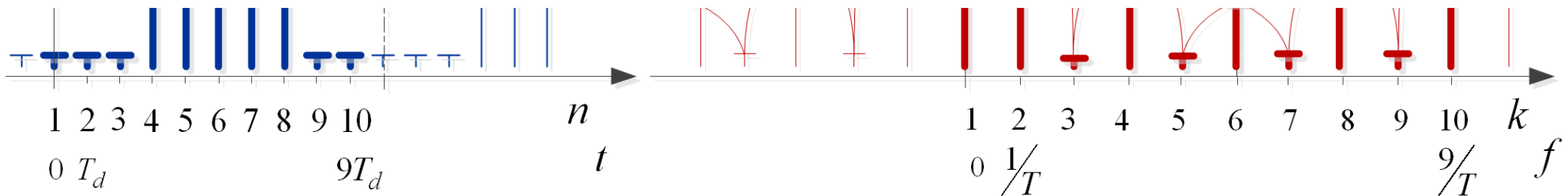
where

$$\omega_N = e^{(-2\pi i)/N}$$

is an N th root of unity.

Оси после FFT

Как правильно сопоставить отсчетам время и частоту?
Вспоминаем картинку со слайда ДПФ!



Шаг по оси времени – T_d . Первая точка – $t = 0$, последняя – $t = T - T_d$.

Шаг по частоте – $1/T$. Первая точка – $f = 0$, последняя – $f = f_d - 1/T$.

```
S = [0 0 0 1 1 1 1 1 0 0]; Sf = fft(S);
```

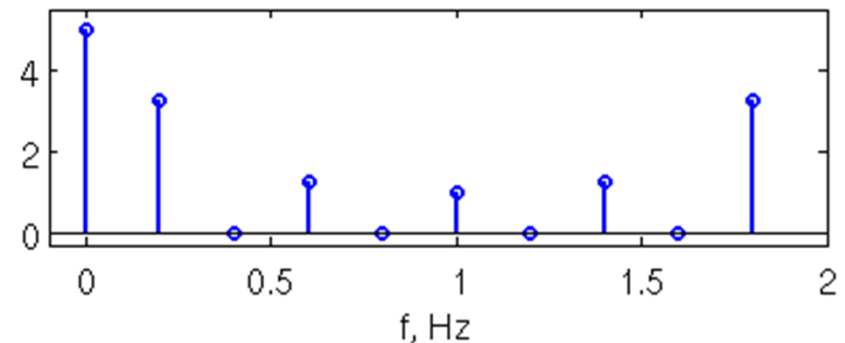
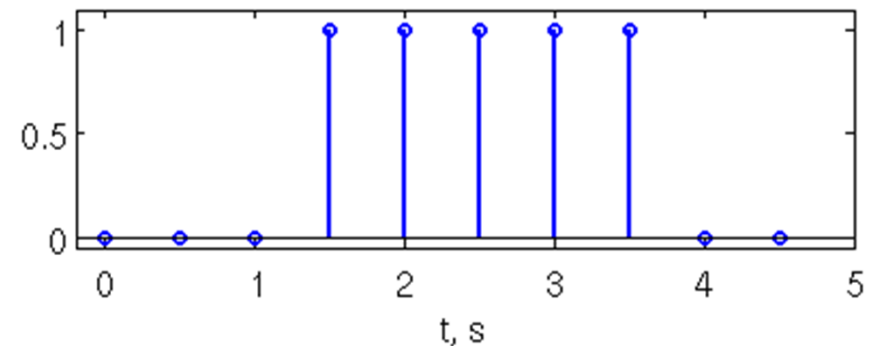
```
Td = 0.5; T = Td * length(S);
```

```
t = 0:Td:(T-Td);
```

```
f = 0:1/T:(1/Td - 1/T);
```

```
figure(1); subplot(2,1,1); stem(t, S);  
xlabel('t, s')
```

```
subplot(2,1,2); stem(f, abs(Sf));  
xlabel('f, Hz')
```



Нормировка ДПФ

К вопросу о масштабе. Выполним FFT для гармонике с амплитудой 1.

$$f_0 = 3;$$

$$T = 1;$$

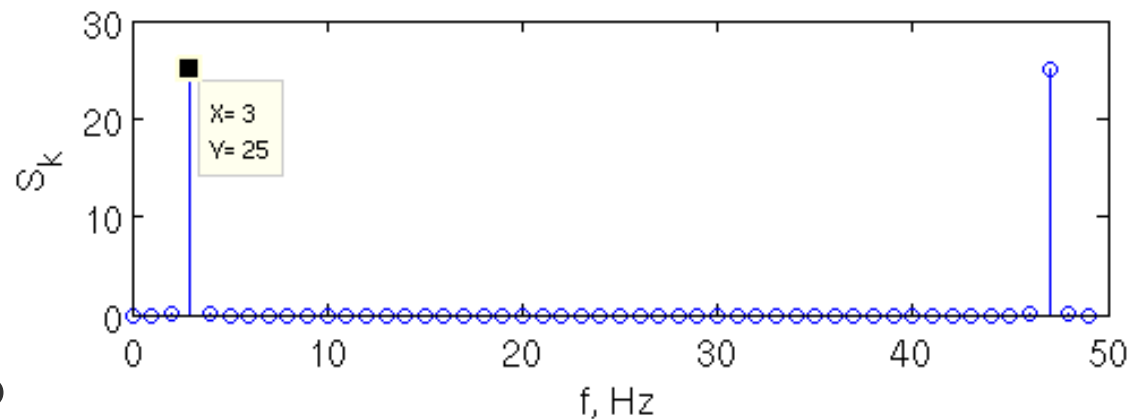
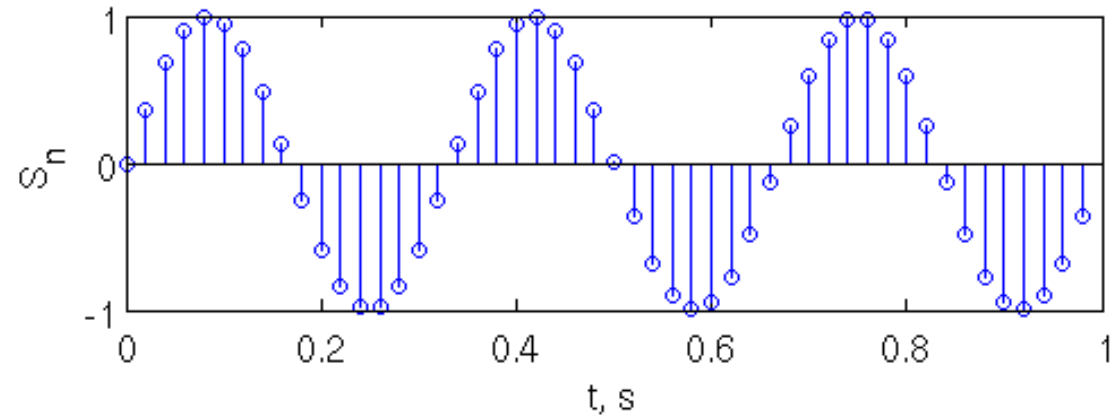
$$T_d = T/50;$$

$$t = 0:T_d:(T-T_d);$$

$$f = 0:1/T:(1/T_d - 1/T);$$

$$S = \sin(2*\pi*f_0*t);$$

$$S_f = \text{fft}(S)$$



Спектр оказывается в
в N раз больше ожидаемого

Это из-за того, что нормировку перенесли в обратное преобразование:

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{f,k} e^{j2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}, \quad n = 1..N$$

Чаще используется прямое,
экономят ресурсы

Теорема Парсеваля

- энергия сигнала во временной и частотной области совпадает

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{S(t)\}|^2 df,$$

В прямом ДПФе
опущена
нормировка,
поэтому
выражение
принимает вид:

$$\sum_{i=1}^N |S_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |S_k|^2$$

Функция `ifft()`
выполняет
обратное FFT

```
N = 100; % количество отсчетов
S = randn(1,N); % нормальное распределение
Et = sum(S.^2);
fprintf('Энергия сигнала во временной области: %f \n', Et);

Sf = fft(S);
Ew = 1/N * sum(abs(Sf).^2);
fprintf('Энергия сигнала в частотной области: %f \n', Ew);

Snew = ifft(Sf);
Etn = sum(Snew.^2);
fprintf('Энергия сигнала во временной области: %f \n', Etn);
```

Результат работы программы

```
-----
Энергия сигнала во временной области: 94.236108
Энергия сигнала в частотной области: 94.236108
Энергия сигнала во временной области: 94.236108
```

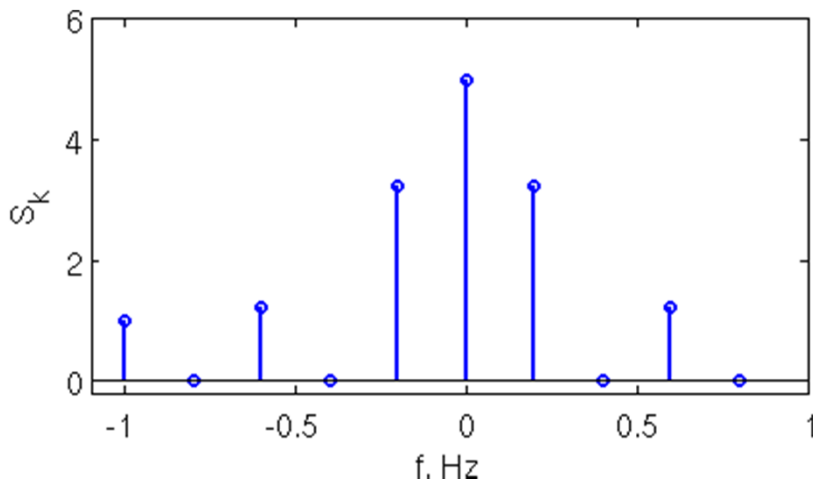
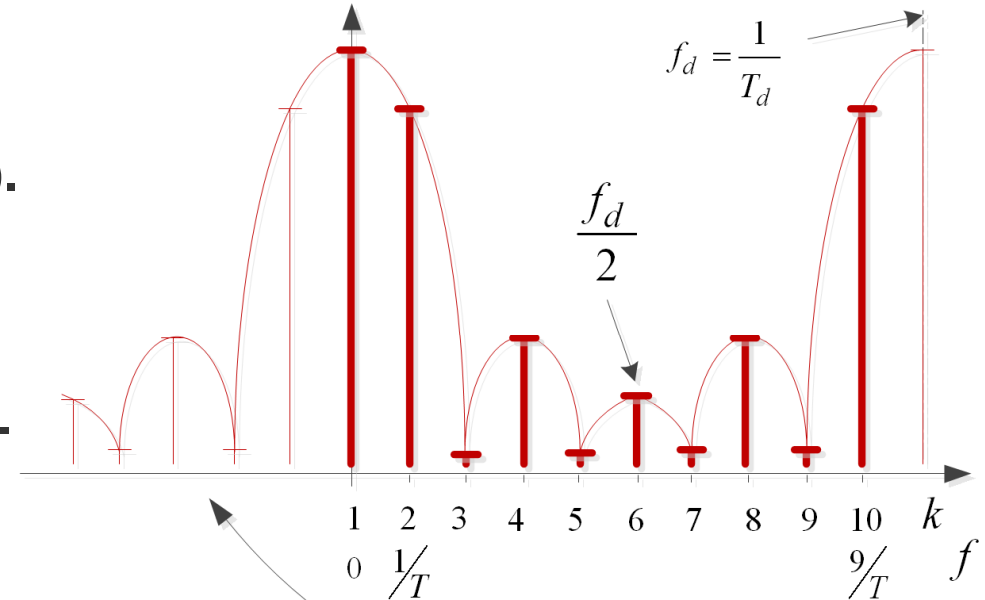
fftshift()

В результате FFT получаем массив с индексами $k=1..N$, которым соответствует частота от 0 до $(f_d - 1/T)$.

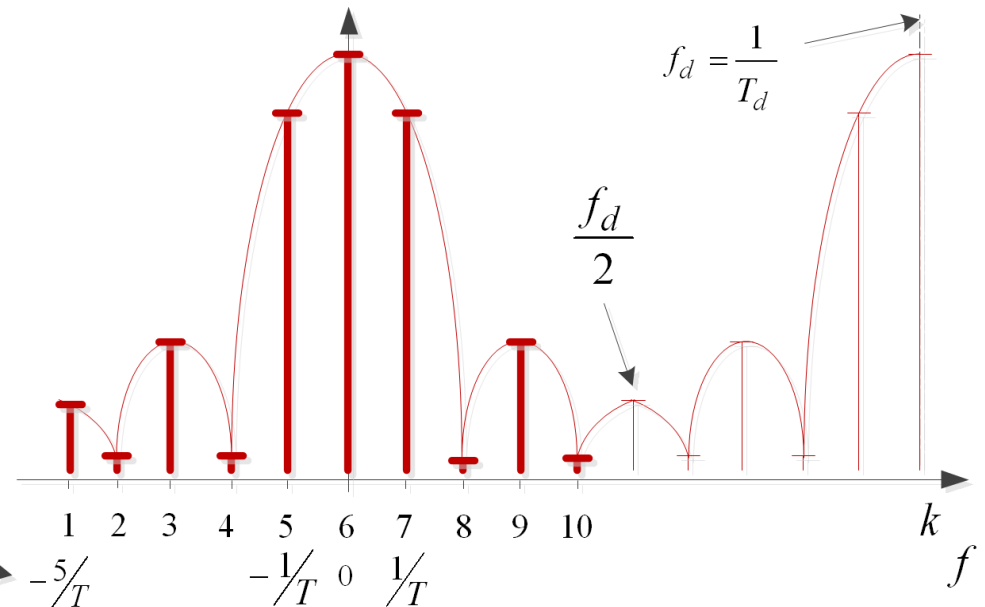
Спектр периодический, можем построить его в субъективно более привычных пределах от $-f_d/2$ до $(f_d/2 - 1/T)$.

Новая ось частоты:

```
f_shift = f - fix(length(S)/2) / T;  
stem(f_shift, abs(fftshift(Sf)))
```



В общем случае: $-\frac{\text{fix}(N/2)}{T} \rightarrow -\frac{5}{T}$



Режектор помех

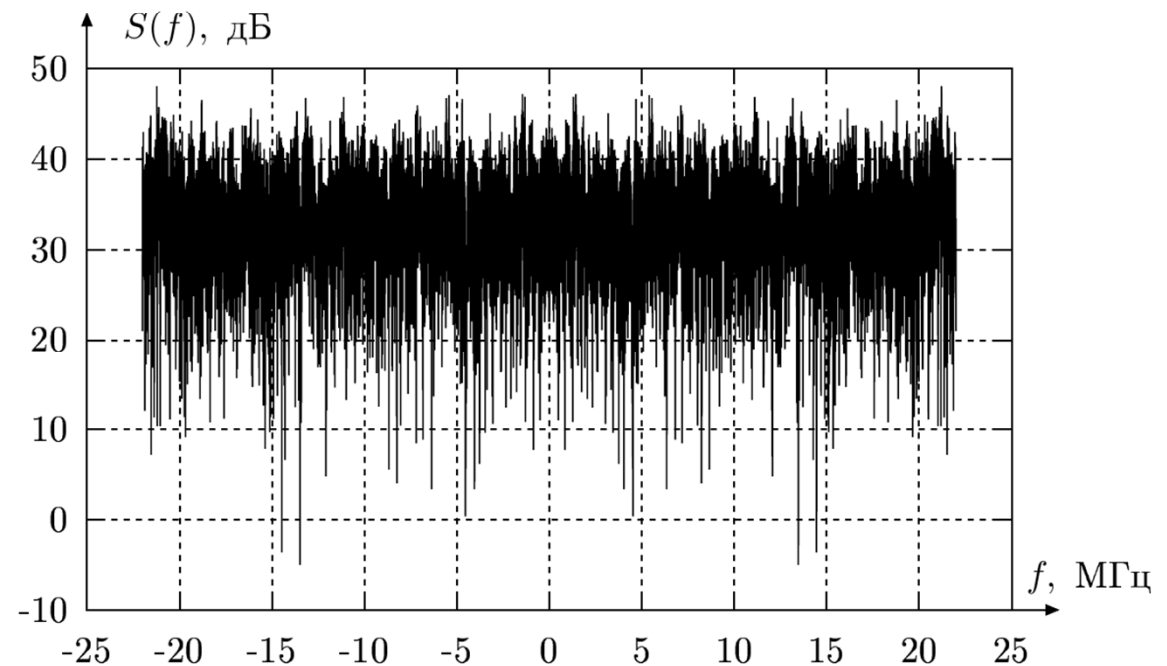
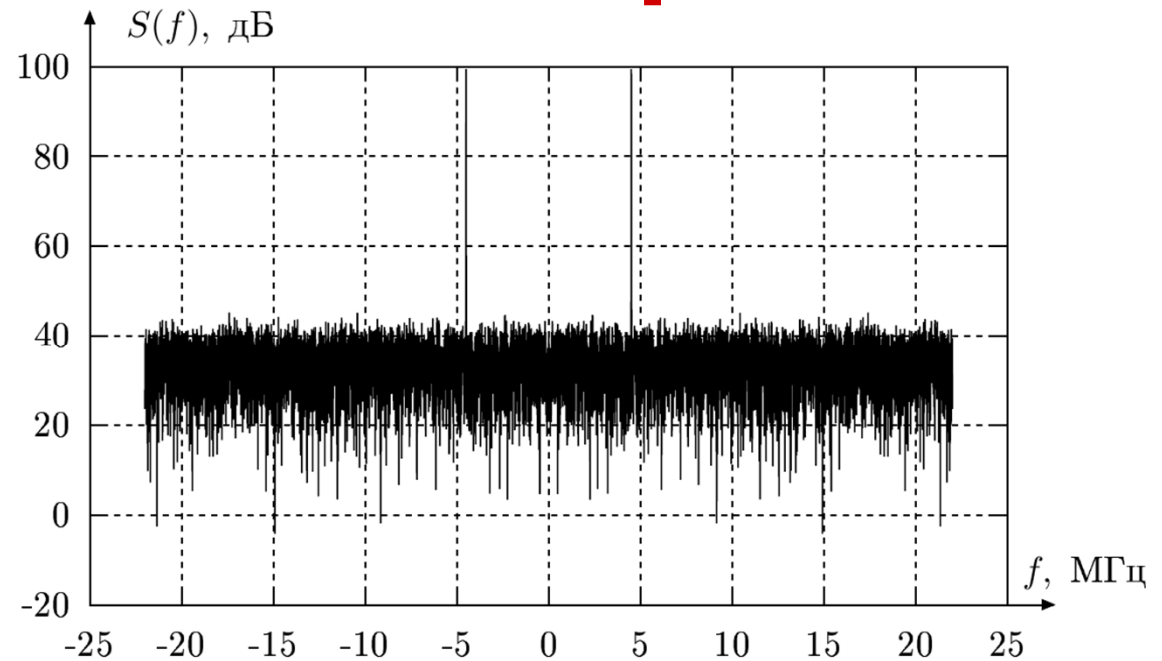
Один из наглядных примеров использования FFT при обработке сигналов – режектор узкополосных помех

Немного теории:

$$\dot{y}_k = \dot{S}_{c,k} + \sum_{i=1}^M \dot{S}_{\Pi,i,k} + \dot{n}_k,$$

$$\dot{\eta}_k = \dot{y}_k - \sum_{i=1}^n \dot{\beta}_i^* \dot{y}_k$$

$$M \left[\left| \dot{\eta}_k - \dot{S}_{c,k} \right|^2 \right] \xrightarrow{\dot{\beta}} \min$$



«Утечка спектра»

DFT мы ввели для периодических сигналов.

Когда мы берем выборку не соответствующую периоду, начинаются проблемы.

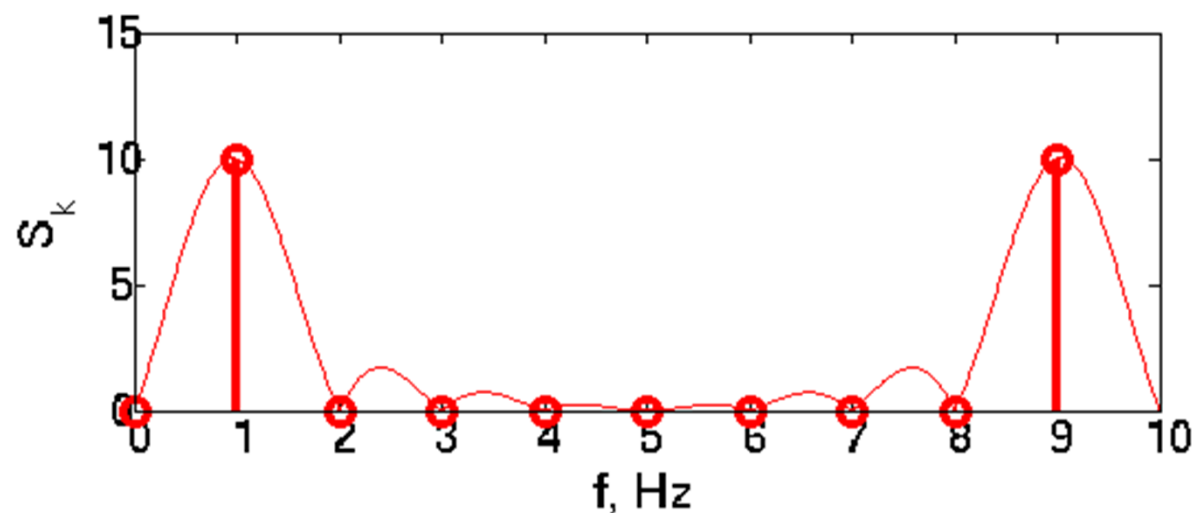
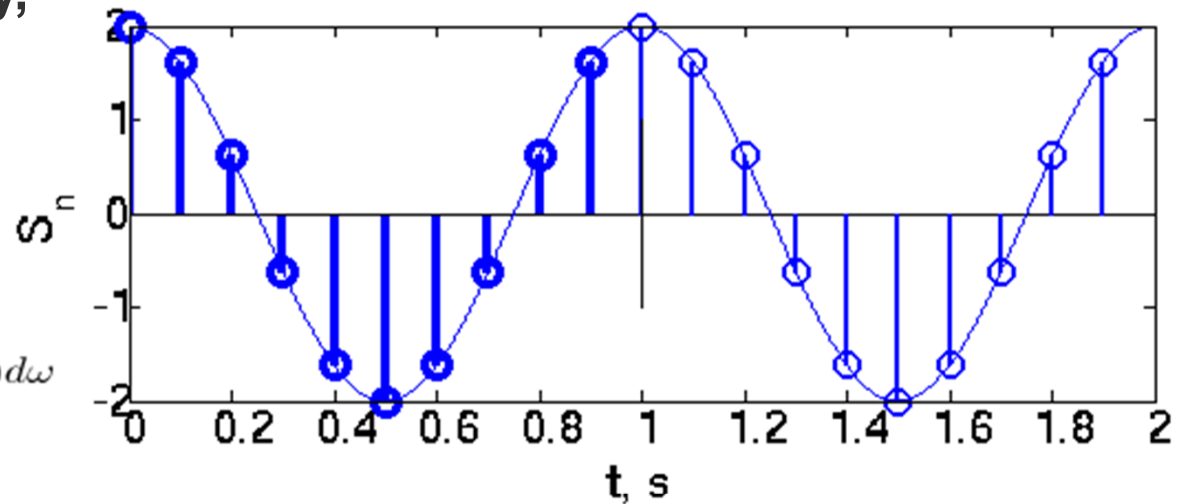
Умножение соответствует свертке:

$$s(t) \times r(t) \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi) \cdot R(\omega - \xi) d\omega$$

Ограничение синусоиды - это умножение на прямоугольное окно.

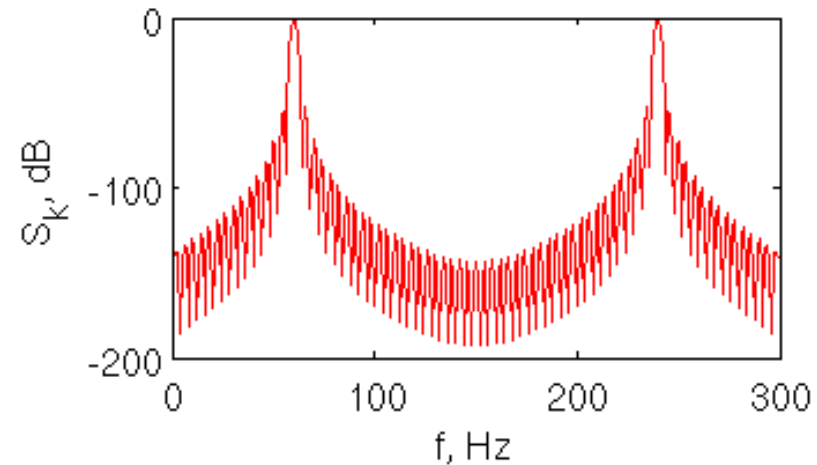
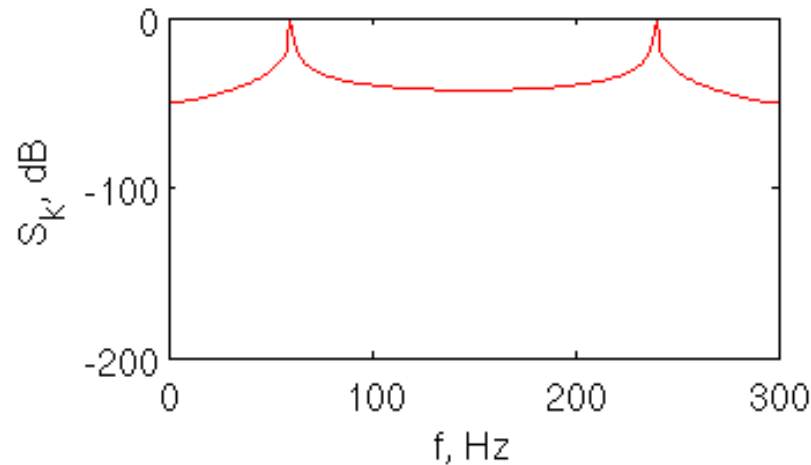
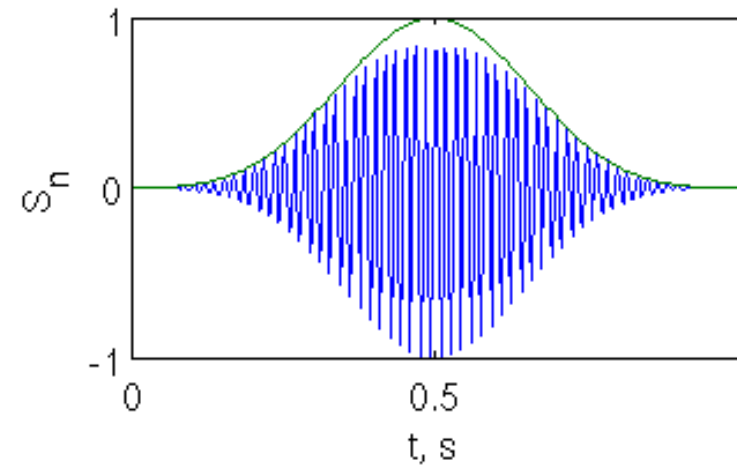
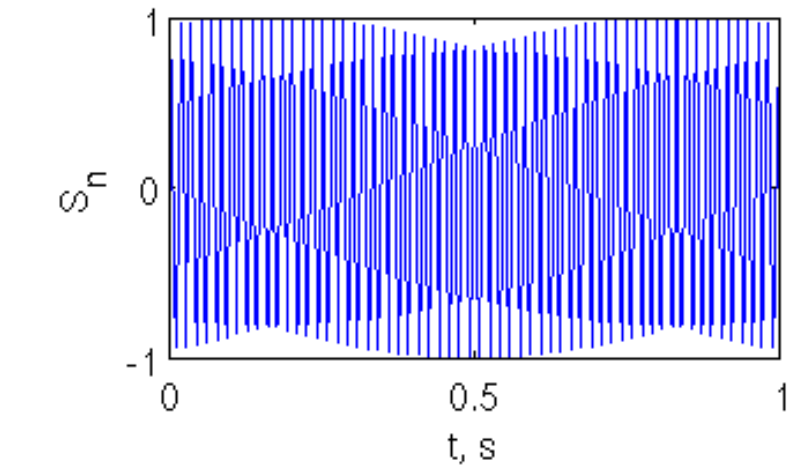
А у него спектр - sinc

Изменяем частоту от 1 до 2 Гц,
 $T = 1$ с, $N = 10$:



Идея – выбирая форму окна можем регулировать утечку спектра.

$$S_w = S \cdot \text{parzenwin}(N)';$$



Главный лепесток стал шире, зато уровень боковых лепестков снизился с -13 до -53 дБ!

Окна бывают разные! Отличаются шириной уровнем боковых и шириной главного лепестка, энергетическими потерями, сложностью.

windowing functions in the frequency domain

