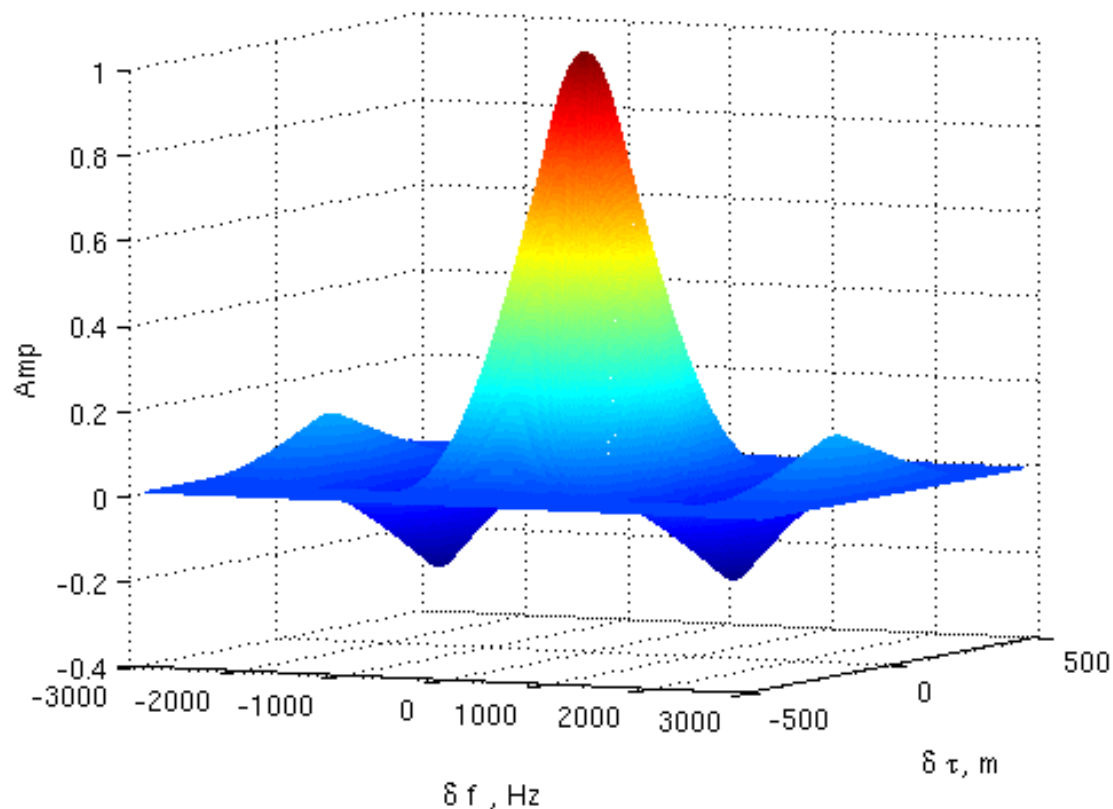


Математическое моделирование РТУ и С

Лекция 11. Метод статистических эквивалентов

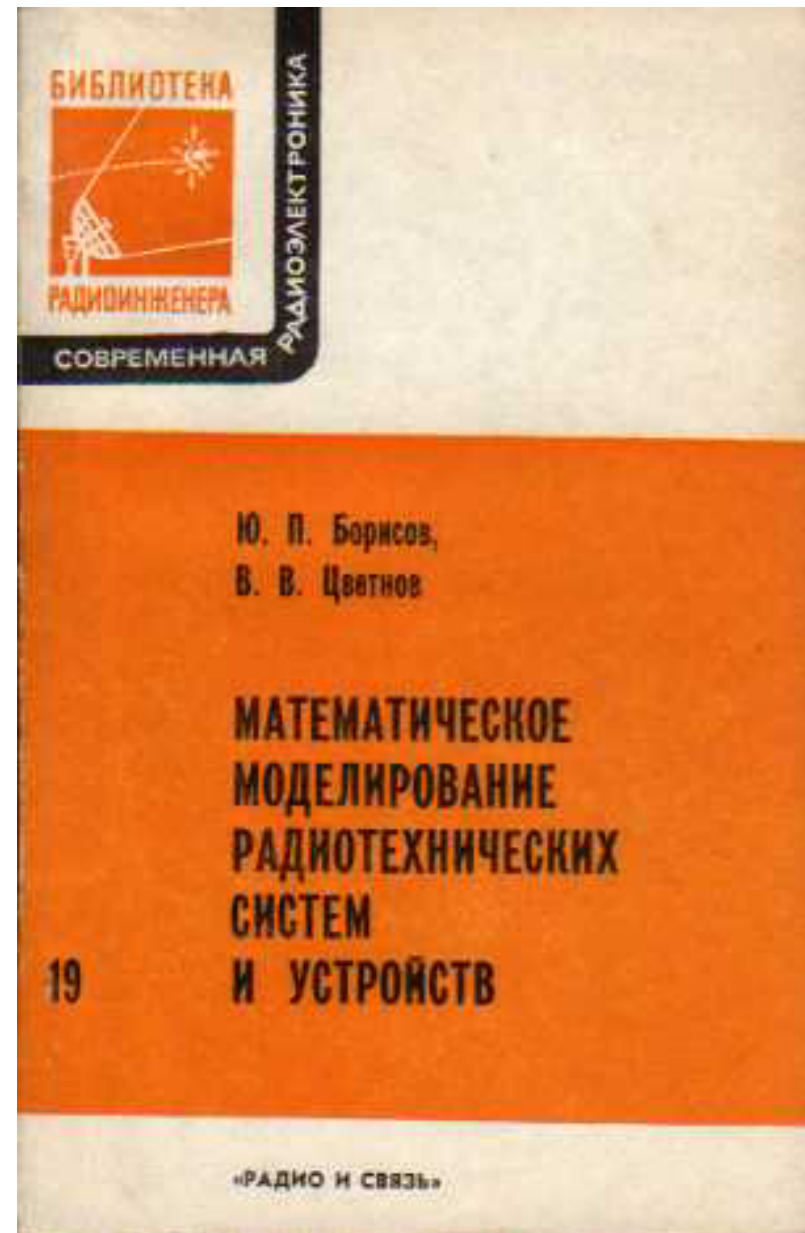


Преподаватель:
Корогодин Илья
korogodin@srns.ru

Литература

Борисов Ю.П., Цветнов В.В.
Математическое
моделирование
радиотехнических систем и
устройств. - М.: Радио и
связь, 1985. 176 с.

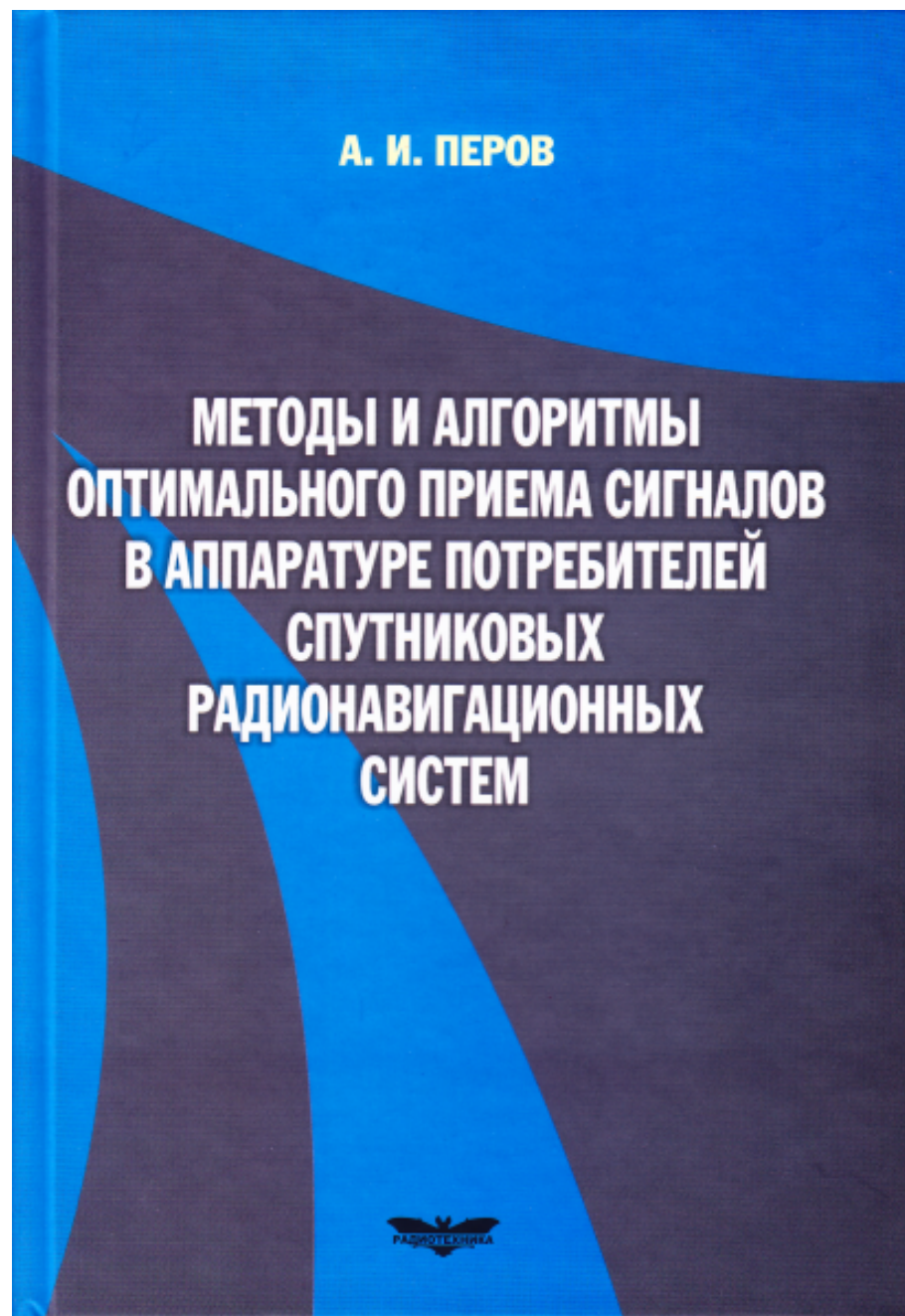
Глава 6. Метод
статистических эквивалентов



Литература

Перов, А. И. Методы и алгоритмы оптимального приема сигналов в аппаратуре потребителей спутниковых радионавигационных систем. — М.: Радиотехника, 2012. — 240 с.

Глава 7. Оптимальная нелинейная фильтрация информационных процессов в навигационной аппаратуре потребителей СРНС



Статистический эквивалент

Радиотехнические устройства производят сложные преобразования входных сигналов.

Сигналы, во многих случаях, - случайные процессы.

Отсюда результат преобразований – случайная величина/случайный процесс.

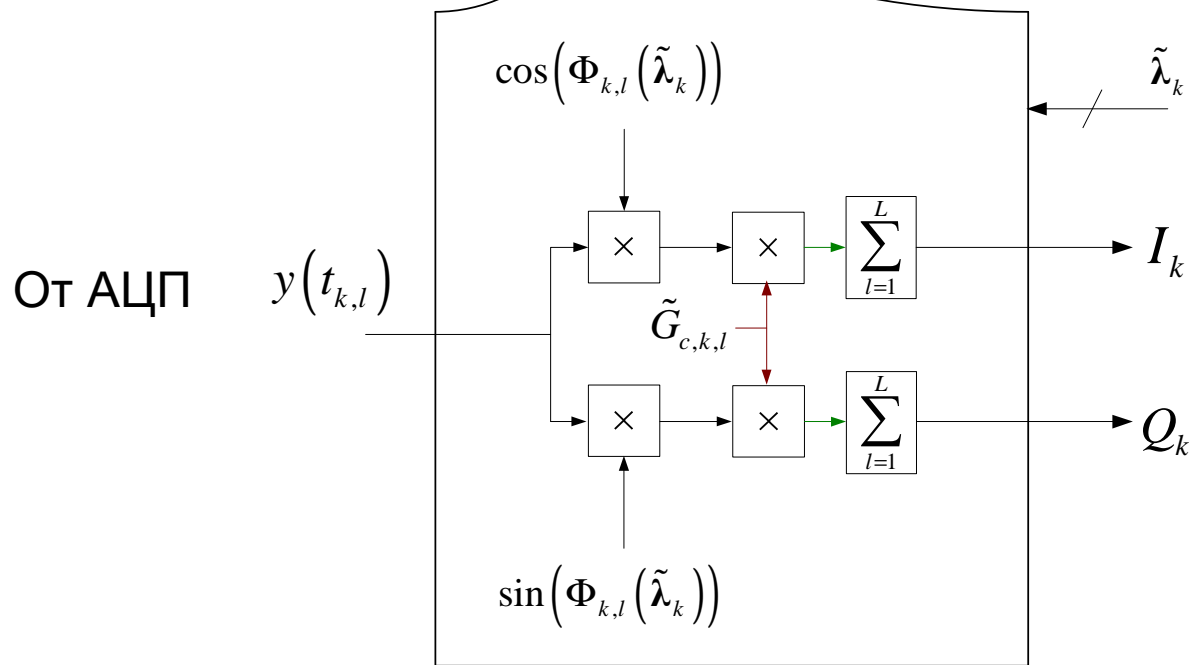
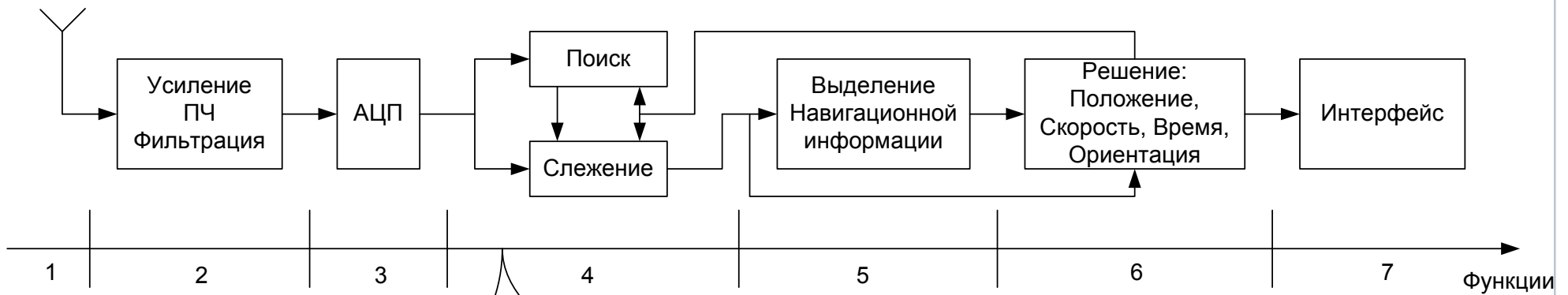


Метод статистических эквивалентов:

1. Аналитически рассчитать характеристики процесса $y(t)$
2. **НЕ** формировать процесс $x(t)$
3. **НЕ** преобразовывать $x(t)$ в $y(t)$
4. Сформировать процесс $\tilde{y}(t)$ с характеристиками $y(t)$
5. Использовать $\tilde{y}(t)$ вместо $y(t)$ при моделировании



Архитектура приемника



К алгоритму поиска;
 следящим системам;
 системе синхронизации и
 выделения навигационной
 информации

$$G_{c,k,l} = G_c(t_{k,l} - \tilde{t}_k);$$

$$\Phi_{k,l}(\tilde{\lambda}_k) = \omega_{if}(t_{k,l} - t_{k,1}) + \int_{t_{k,1}}^{t_{k,l}} \tilde{\omega}_{d,k} dt$$

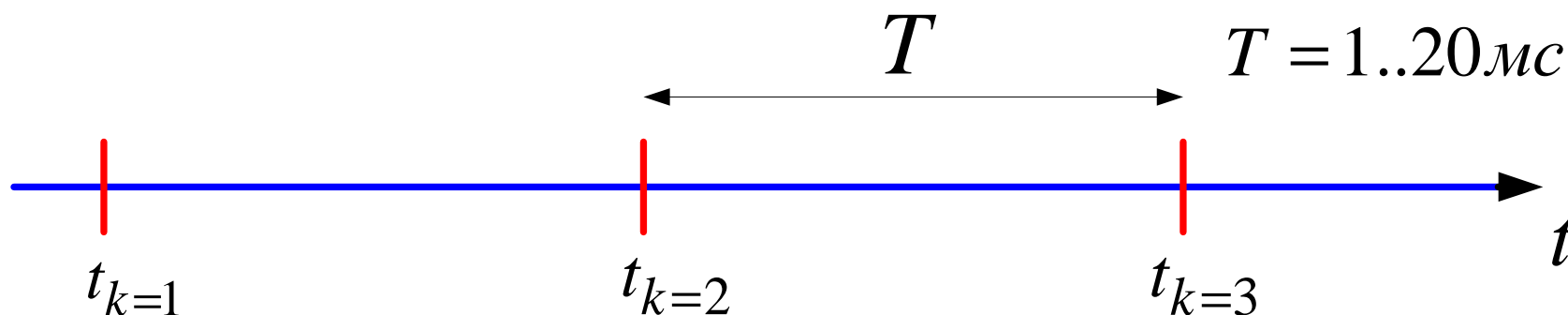
Для решения своей задачи навигационный приемник должен производить оценивание параметров приходящих радиосигналов:

- Грубо, но быстро - на этапе поиска;
- Максимально точно на этапе слежения...

Объединим, для наглядности, набор параметров: частоту, задержку, фазу, амплитуду и т.д. в один вектор

$$\lambda = \begin{vmatrix} \tau \\ \omega \\ \dots \\ \varphi \end{vmatrix}$$

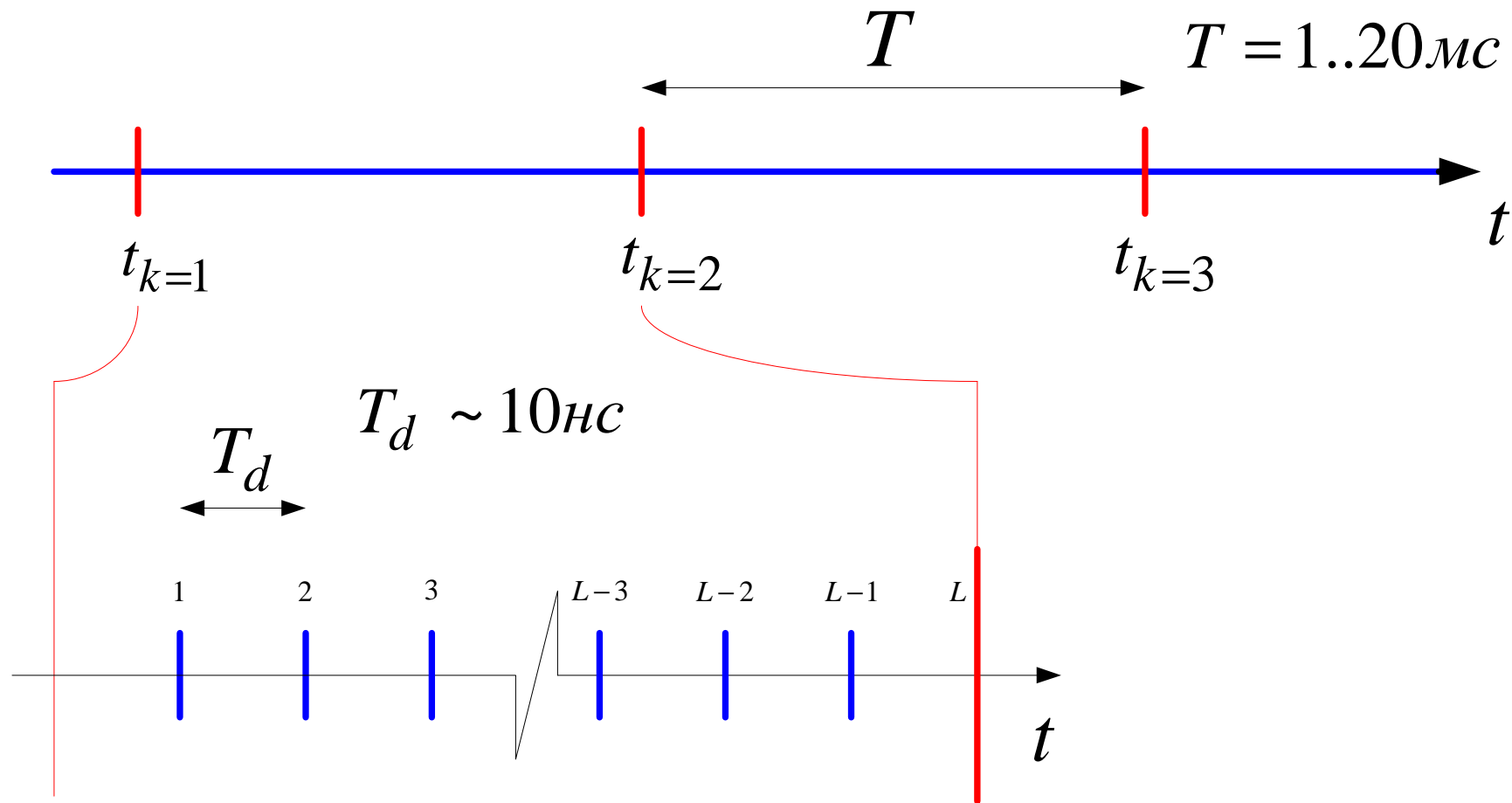
Шкала времени



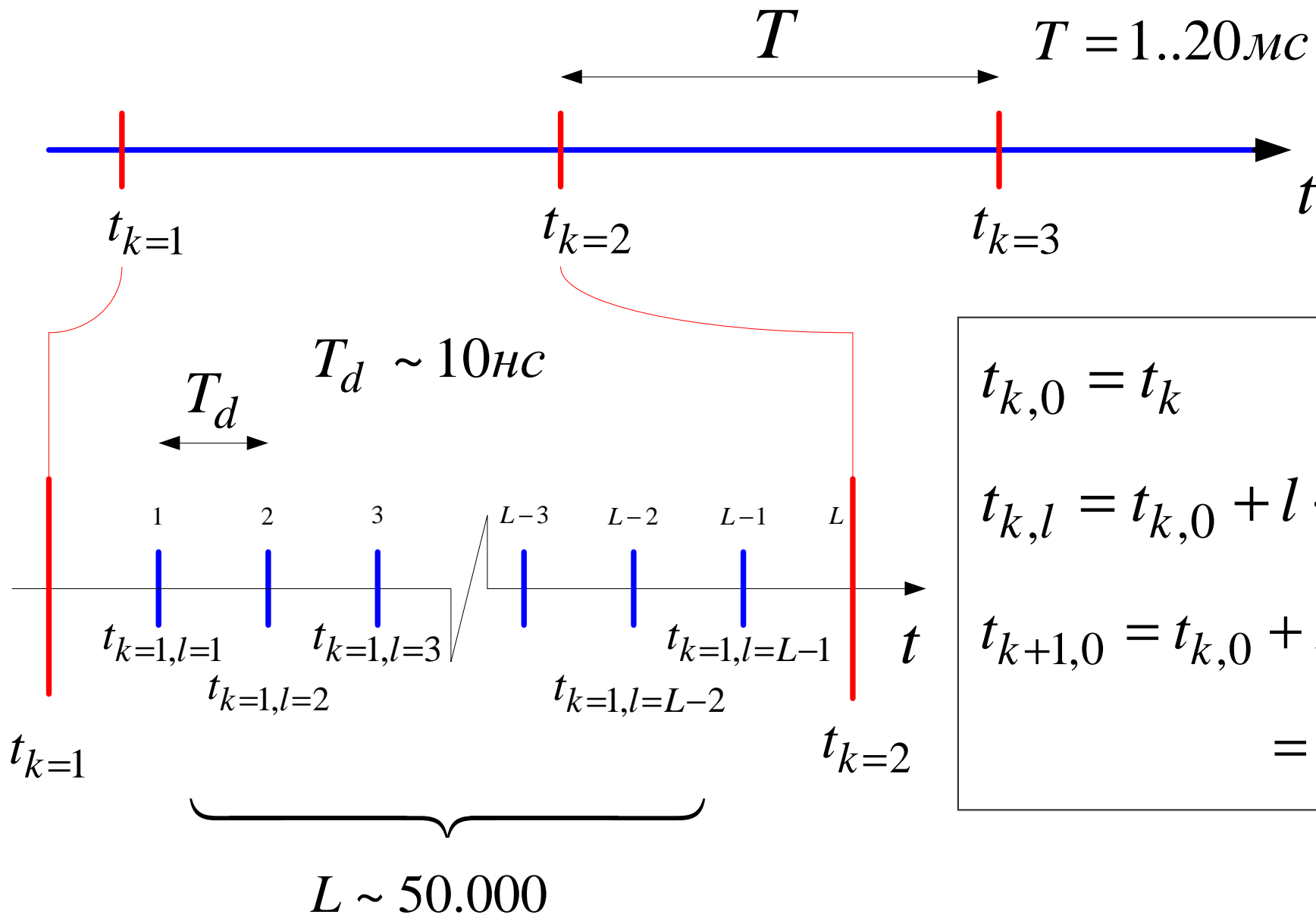
Ось времени разбивается на интервалы, на которых параметры сигнала λ можно считать неизменными. Для упрощения интервалы берут одинаковой длительности -

T

Шкала времени



Шкала времени



$$t_{k,0} = t_k$$

$$t_{k,l} = t_{k,0} + l \cdot T_d$$

$$t_{k+1,0} = t_{k,0} + L \cdot T_d =$$
$$= t_{k,0} + T$$

Модель наблюдений

- Корреляторы бывают разные;
- Конкретный вид зависит от **модели наблюдений (сигнала на выходе АЦП)** и от решаемой задачи.

Составим модель наблюдений, которая приводит к наиболее часто встречаемой на практике форме

Модель наблюдений

Как сказано выше, на каждом интервале T параметры λ_k , подлежащие оцениванию, неизменны:

- зависят от индекса k ,
- не зависят от внутреннего индекса l

Смена значений происходит при смене интервала, т.е. в момент $t_{k,0} = t_{k-1,L}$

Модель наблюдений

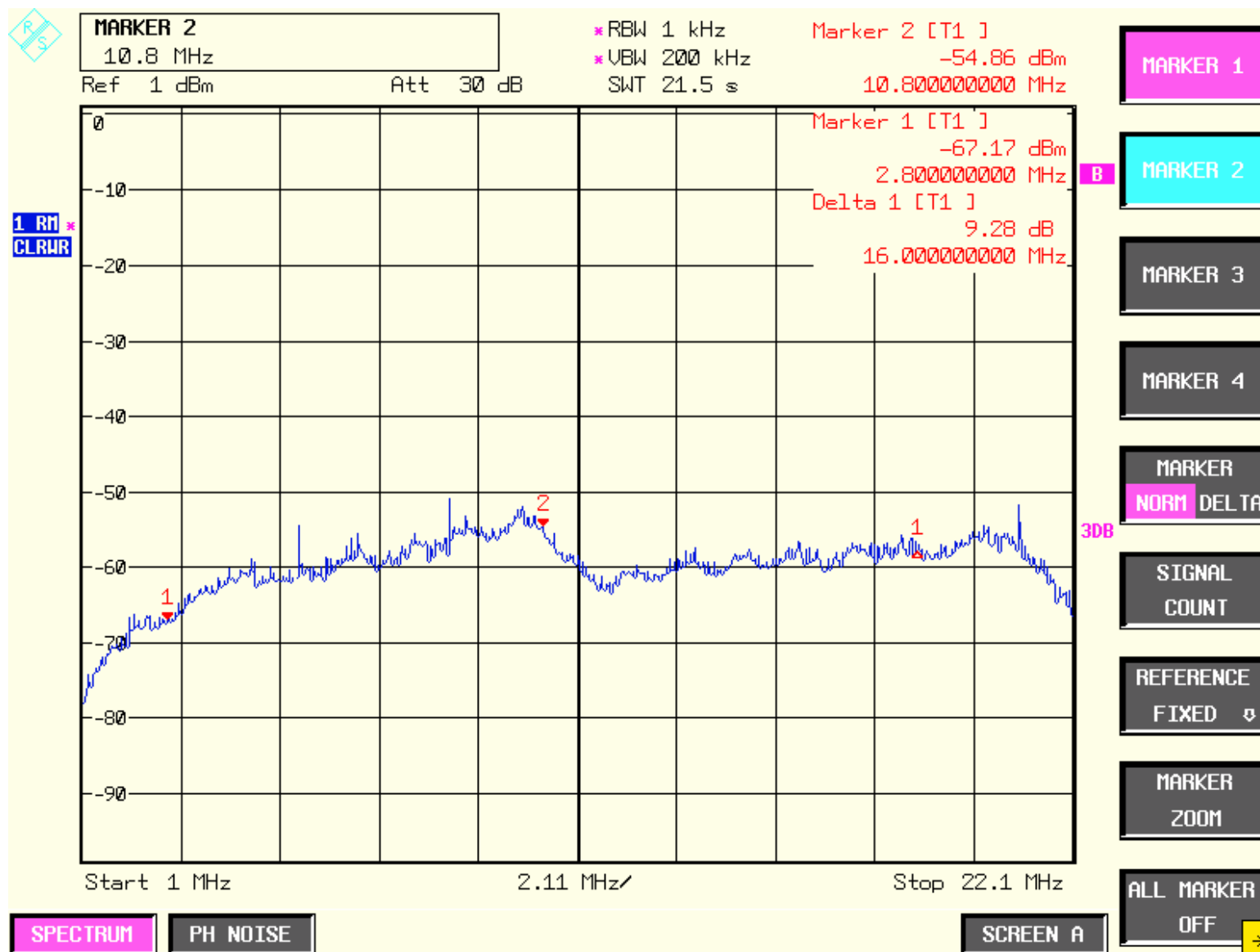
Хорошей моделью для выходных отсчетов АЦП может послужить аддитивная модель шума и радионавигационного сигнала:

$$y_{k,l} = S_{k,l} + n_{k,l}$$

$S_{k,l}$ - полезный сигнал ПЧ

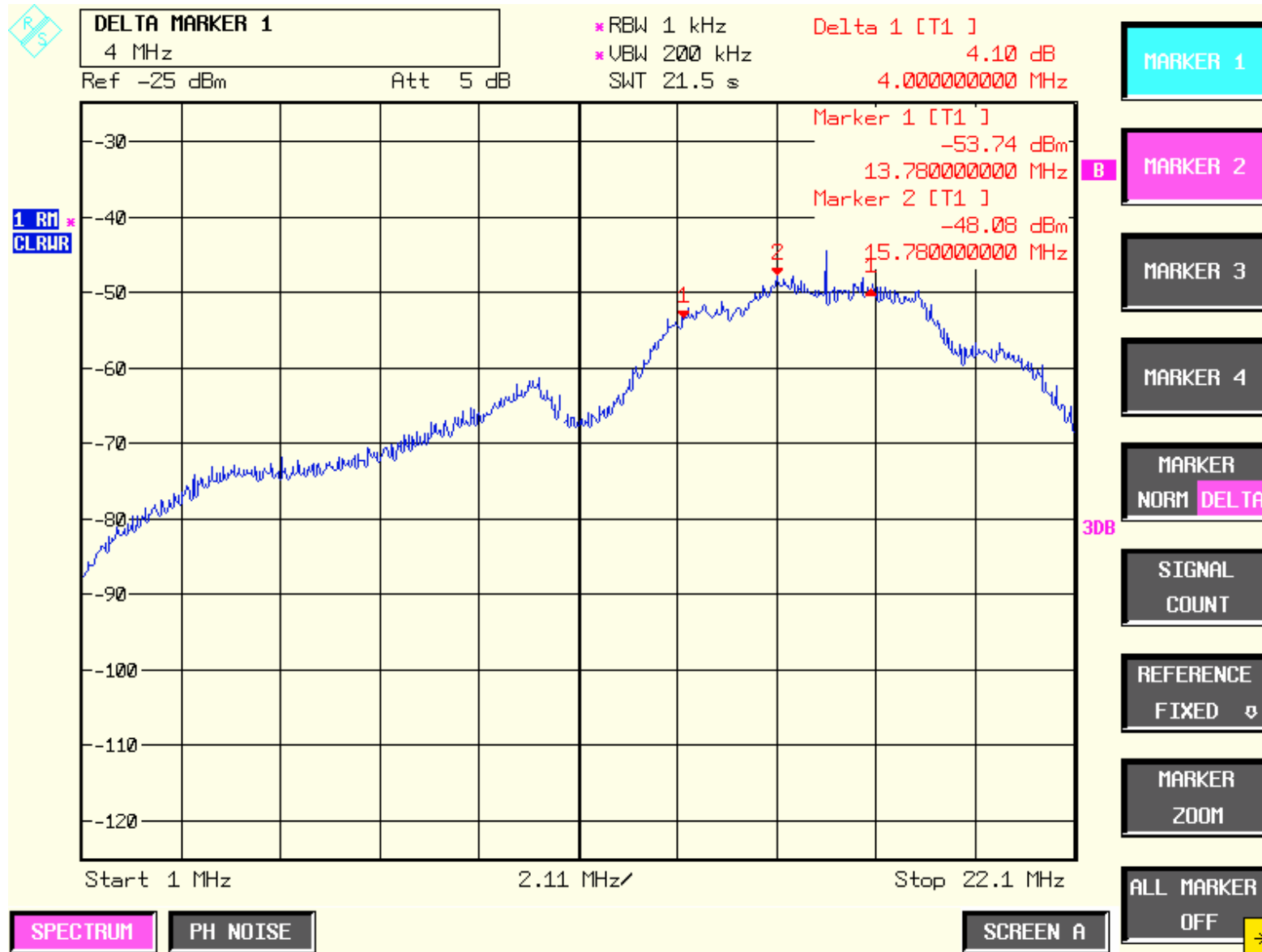
$n_{k,l}$ - ДБГШ с дисперсией σ_n^2

Модель наблюдений



Выход АЦП ГЛОНАСС

Модель наблюдений



Выход АЦП GPS

Модель сигнала

$$S_{k,l} = A_k \cdot G_c(t_{k,l} - \tau_k) \cdot G_{nd,k} \cdot \cos(\Phi_{k,l}(\lambda_k))$$

$A_k \in [0; A_{\max}]$ - амплитуда;

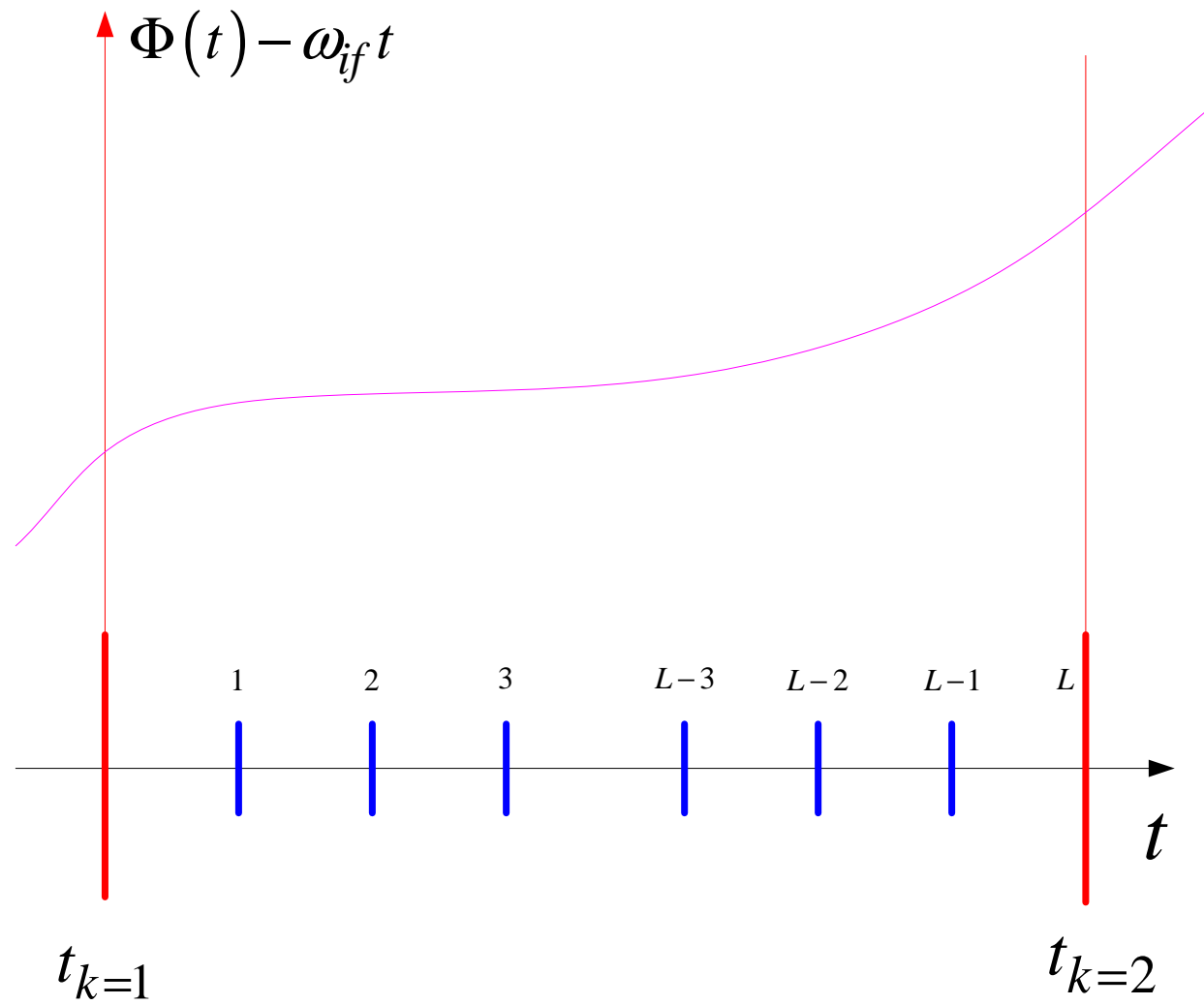
$G_c(x) \in \{-1; +1\}$ - функция дальномерного кода;

$\tau_k \in (-\infty; +\infty)$ - задержка дальномерного кода;

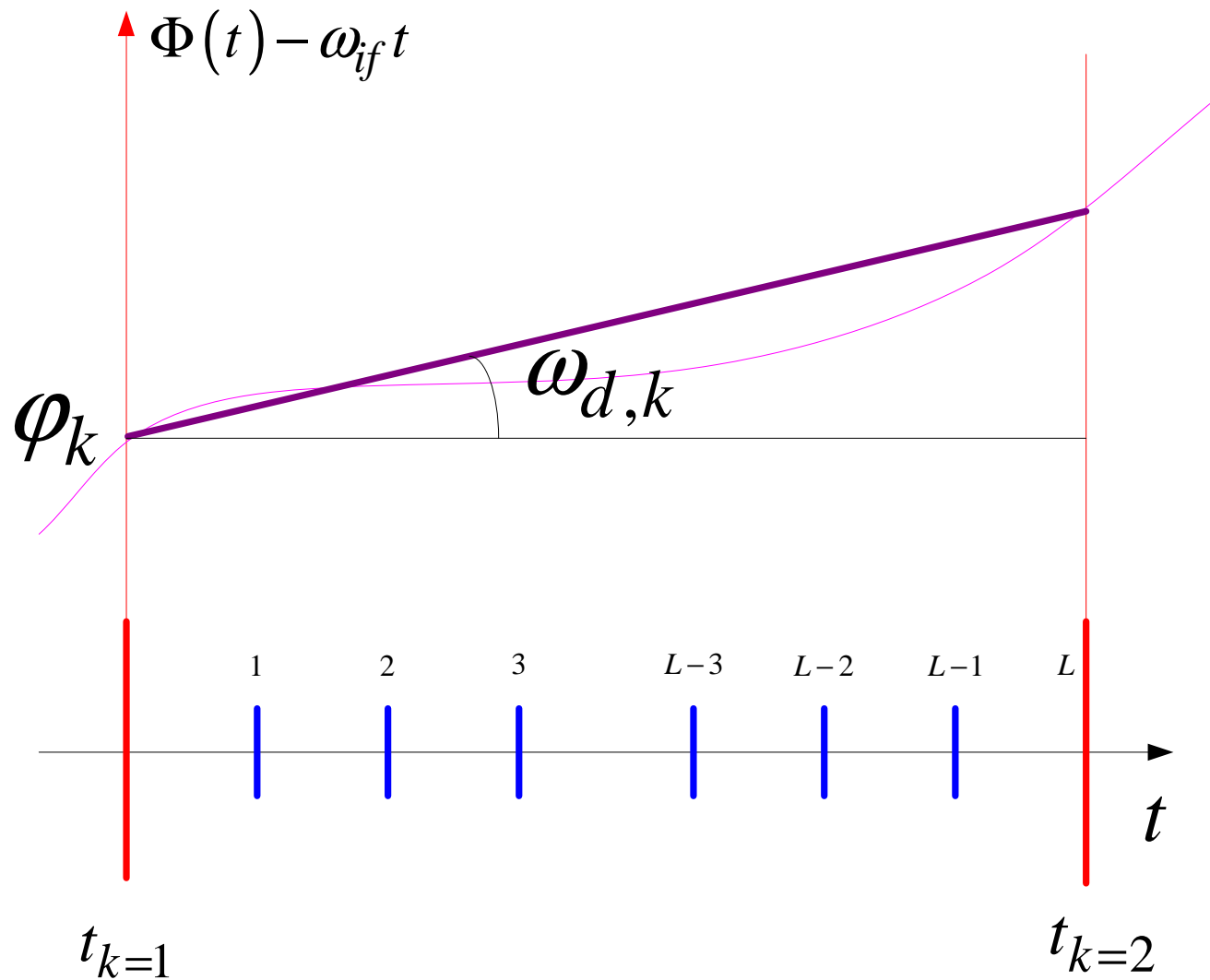
$G_{nd,k} \in \{-1; +1\}$ - бит модуляции навигационным сообщением;

$\Phi_{k,l}(\lambda_k) \in (-\infty; +\infty)$ - полная фаза сигнала ПЧ.

Модель изменения фазы



Модель изменения фазы



$$\Phi_{k,l}(\lambda_k) = \omega_{if}t_{k,l} + \omega_{d,k}lT_d + \varphi_k$$

Итоговая модель сигнала

$$S_{k,l} = A_k \cdot G_c(t_{k,l} - \tau_k) \cdot G_{nd,k} \cdot \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \omega_{d,k} l T_d + \varphi_k)$$

$$A_k \in [0; A_{\max}]$$

- амплитуда;

$$G_c(x) \in \{-1; +1\}$$

- функция дальномерного кода;

$$\tau_k \in (-\infty; +\infty)$$

- задержка дальномерного кода;

$$G_{nd,k} \in \{-1; +1\}$$

- бит модуляции НС;

$$\omega_{d,k} \in 2\pi \cdot (-10; +10) \text{ kHz}$$

- сдвиг частоты (доплер и т.д.);

$$\varphi_k \in (-\infty; +\infty)$$

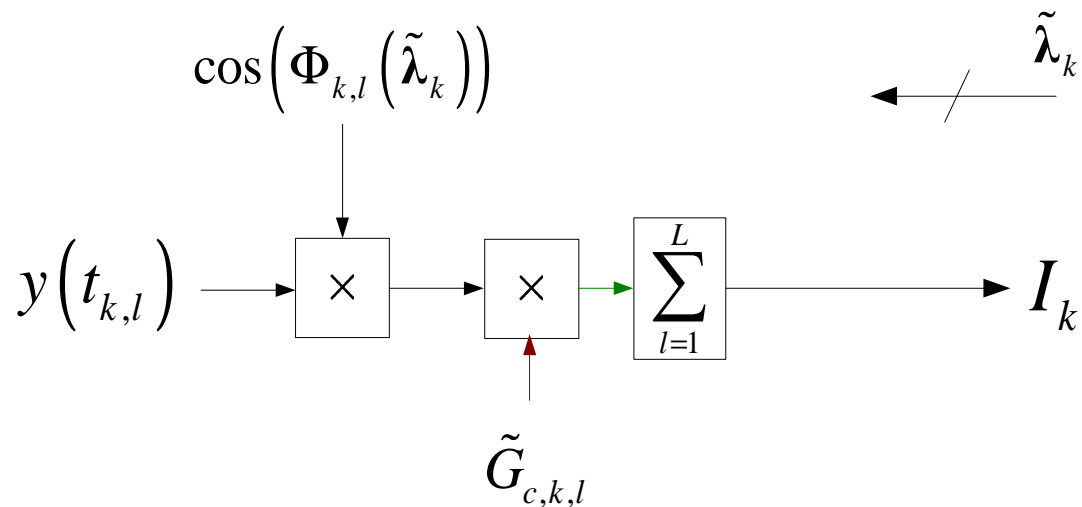
- начальная фаза.

$$I_k = \sum_{l=1}^L y_{k,l} \cdot G_c \left(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k \right) \cos \left(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k \right)$$

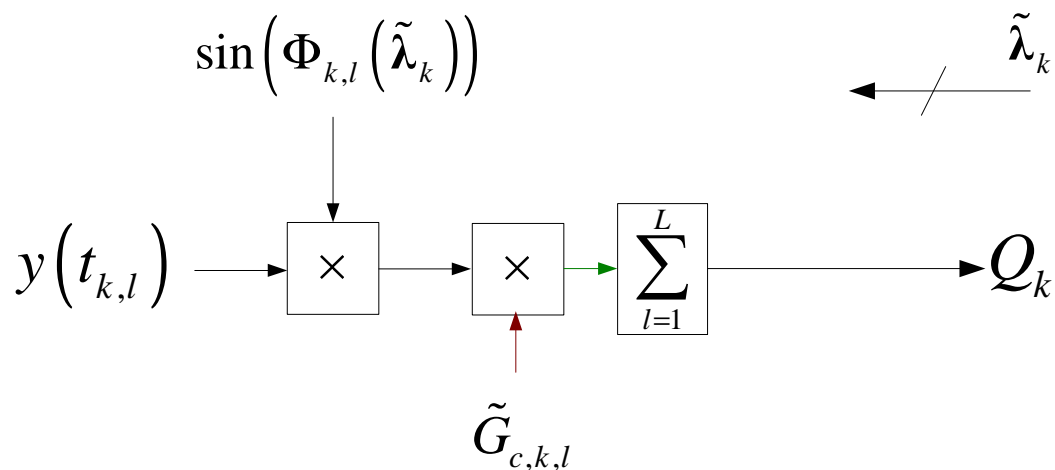
$$Q_k = \sum_{l=1}^L y_{k,l} \cdot G_c \left(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k \right) \sin \left(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k \right)$$

Многозначность термина

Термин «коррелятор» («канал коррелятора») многозначный:

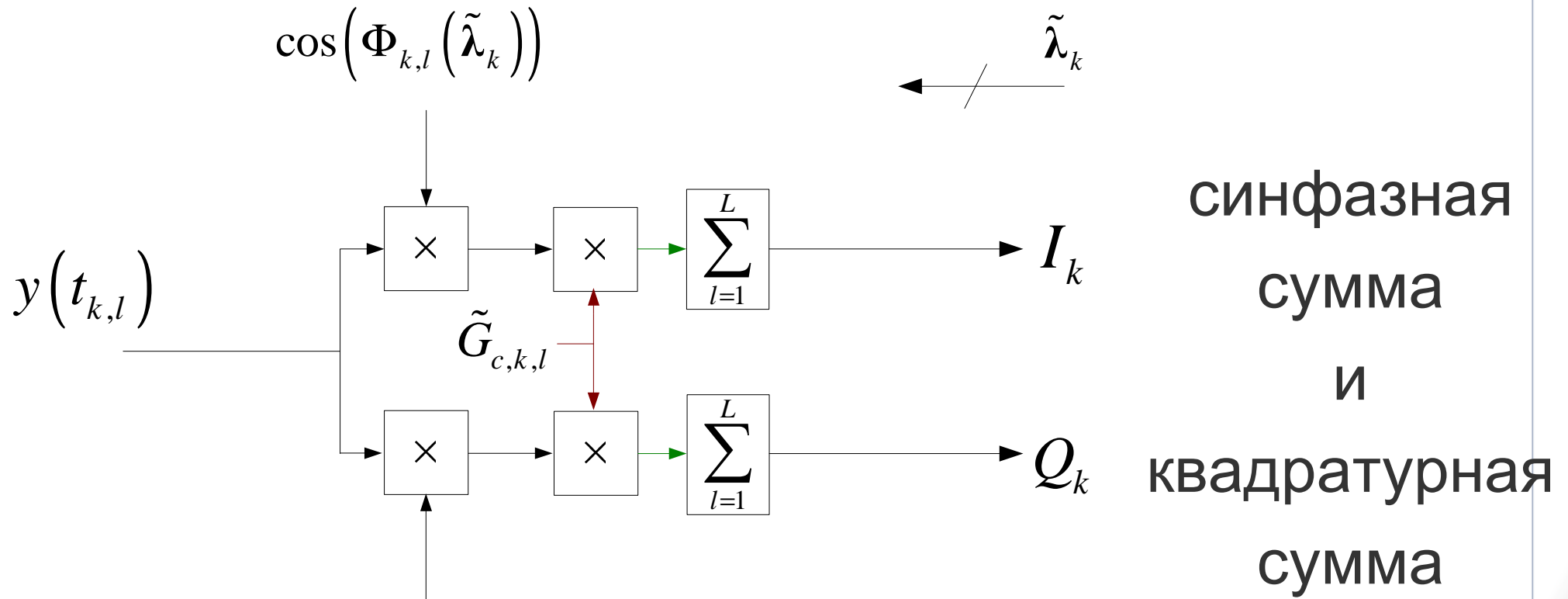


синфазная
сумма

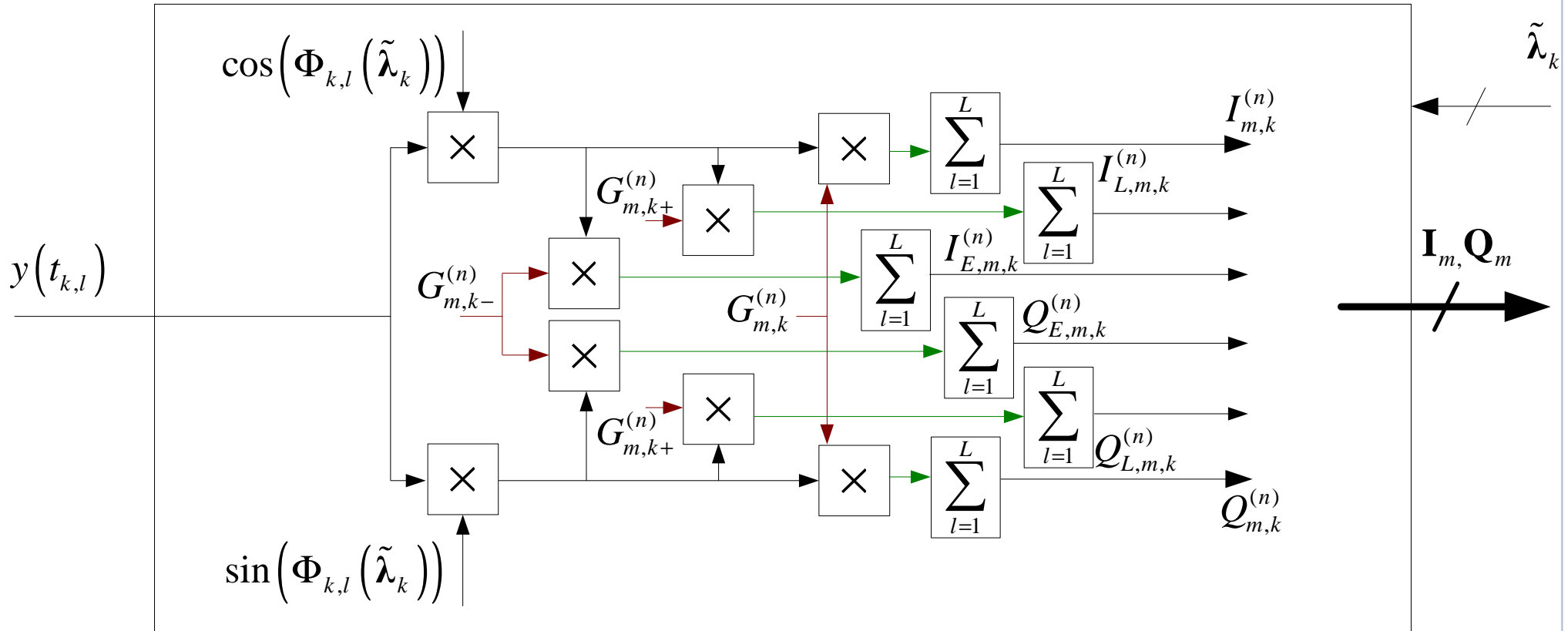


или
квадратурная
сумма

Многозначность термина

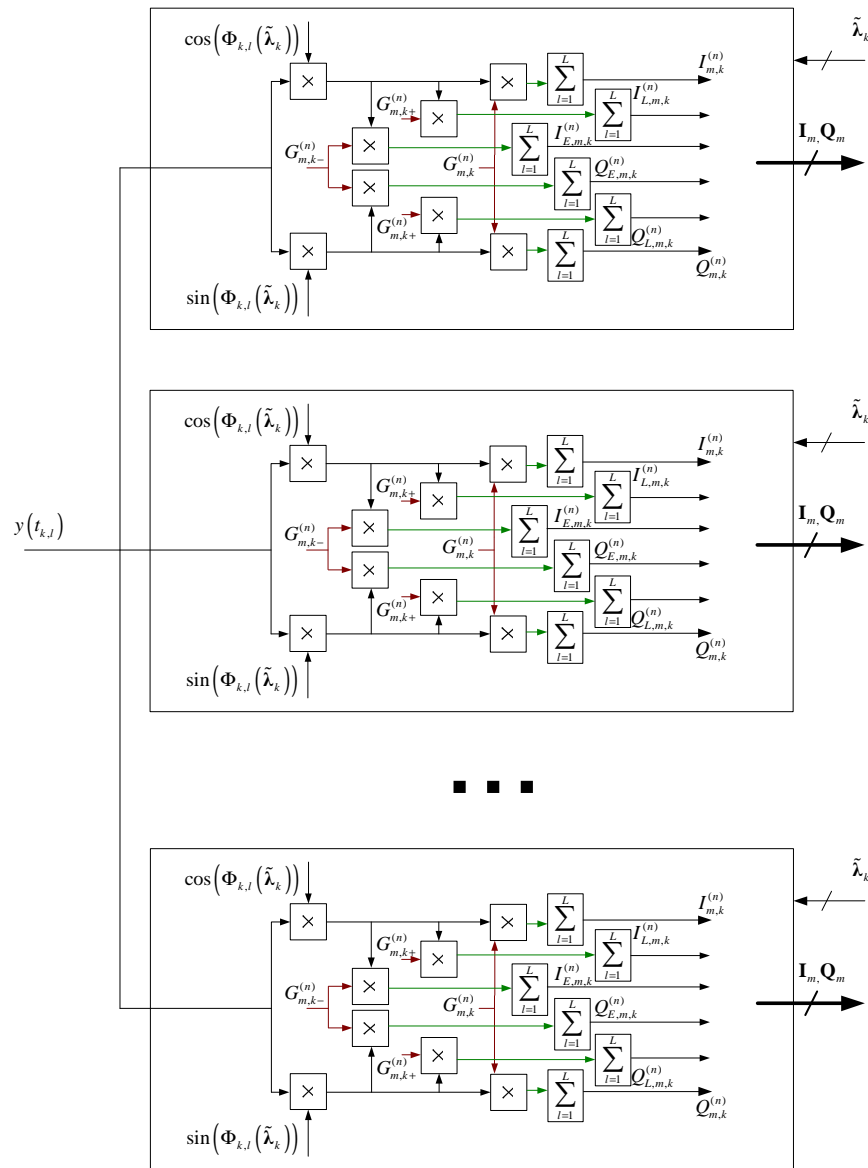


Многозначность термина



Суммы для опережающей, нормальной и запаздывающей ПСП ДК одного сигнала

Многозначность термина



Наборы необходимых
корреляционных
сумм для всех
сигналов

Расчет стат. эквивалентов

$$I_k = \sum_{l=1}^L S_{k,l}(\lambda_k) \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k) \\ + \sum_{l=1}^L n_{k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\bar{I}_k = \sum_{l=1}^L S_{k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)$$

$$I_k = \sum_{l=1}^L S_{k,l}(\lambda_k) \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)$$

$$+ \sum_{l=1}^L n_{k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)$$

$$n_{I,k} = \sum_{l=1}^L n_{k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)$$

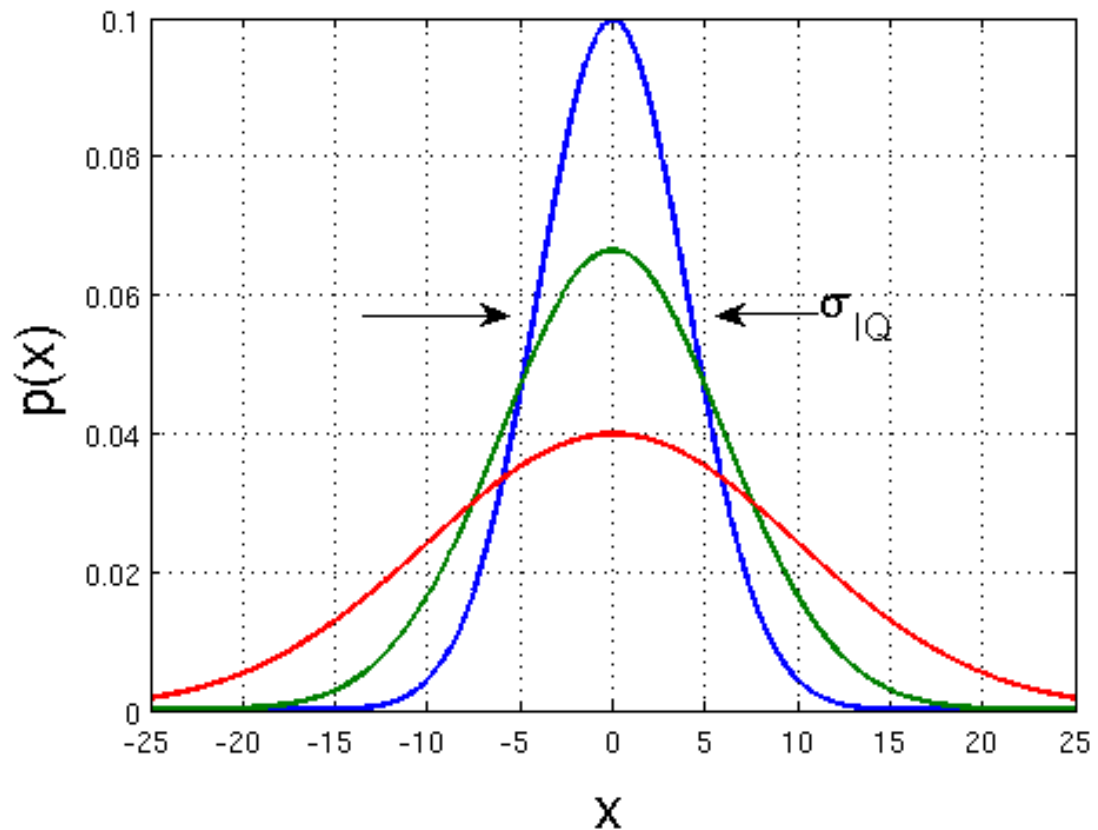
$$I_k = \bar{I}_k + n_{I,k}$$

Расчет стат. эквивалентов

$$n_{I,k} = n_{k,1} \cos(\zeta_1) + n_{k,2} \cos(\zeta_2) + n_{k,3} \cos(\zeta_3) + \dots$$

$$n_{I,k} \sim N(0, \sigma_{IQ}^2)$$

$$\sigma_{IQ}^2 = \frac{\sigma_n^2 L}{2}$$



Расчет стат. эквивалентов

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= \sum_{l=1}^L S_{k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k) = \\ &= A \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_k) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \times \\ &\quad \times G_{nd,k} \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \omega_{d,k} l T_d + \varphi_k) \cos(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k)\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

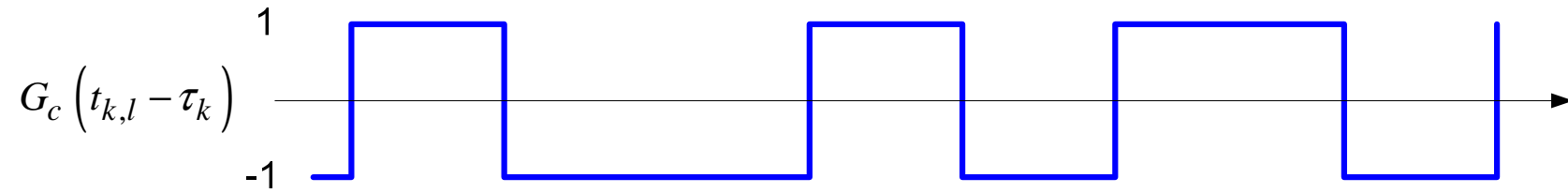
Расчет стат. эквивалентов

$$\bar{I}_k \approx \frac{1}{2} A G_{nd,k} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_k) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k) \cos(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k)$$

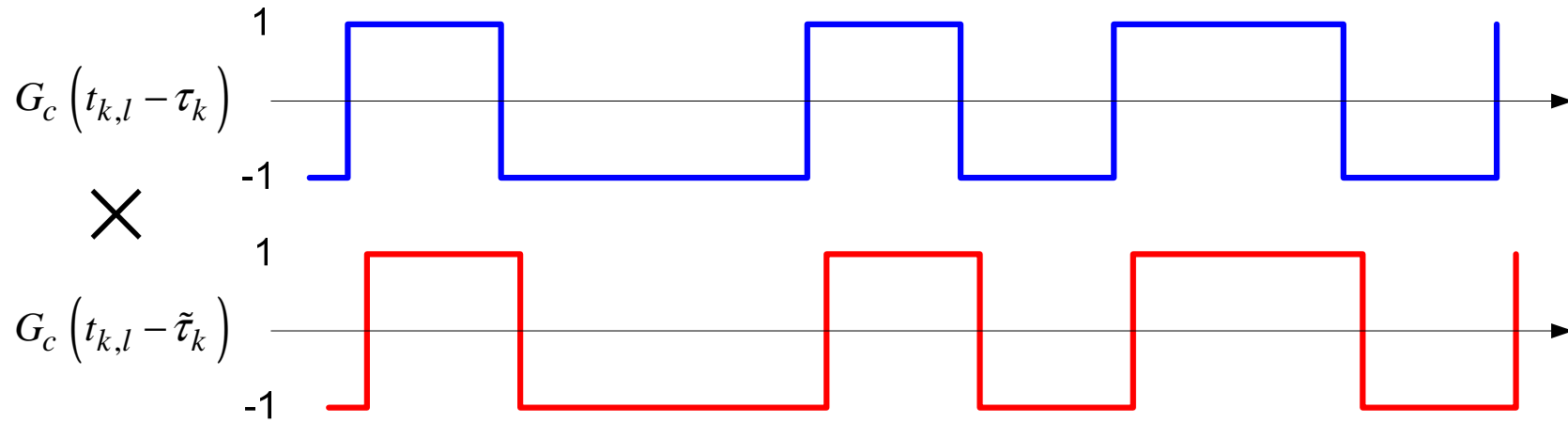
$$\delta\omega_{d,k} = \omega_{d,k} - \tilde{\omega}_{d,k}$$

$$\delta\varphi_k = \varphi_k - \tilde{\varphi}_k$$

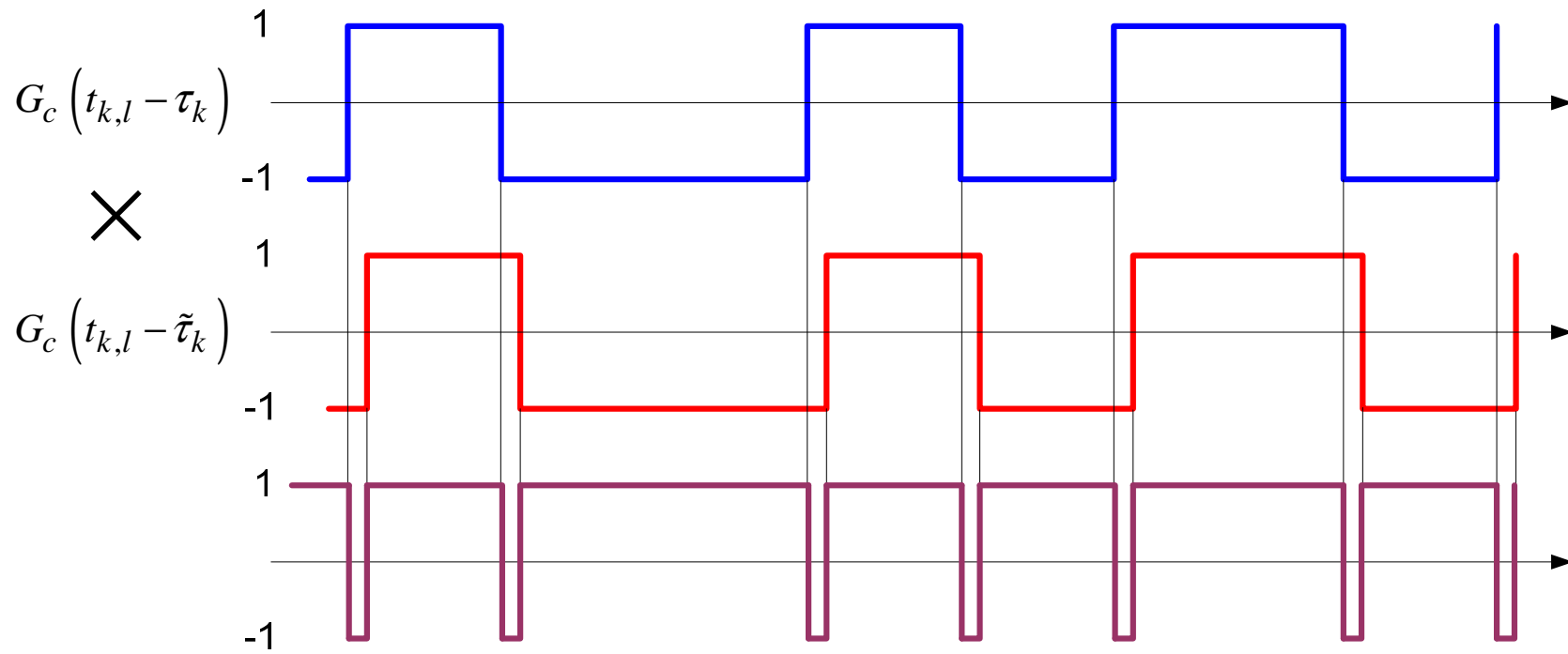
Расчет стат. эквивалентов



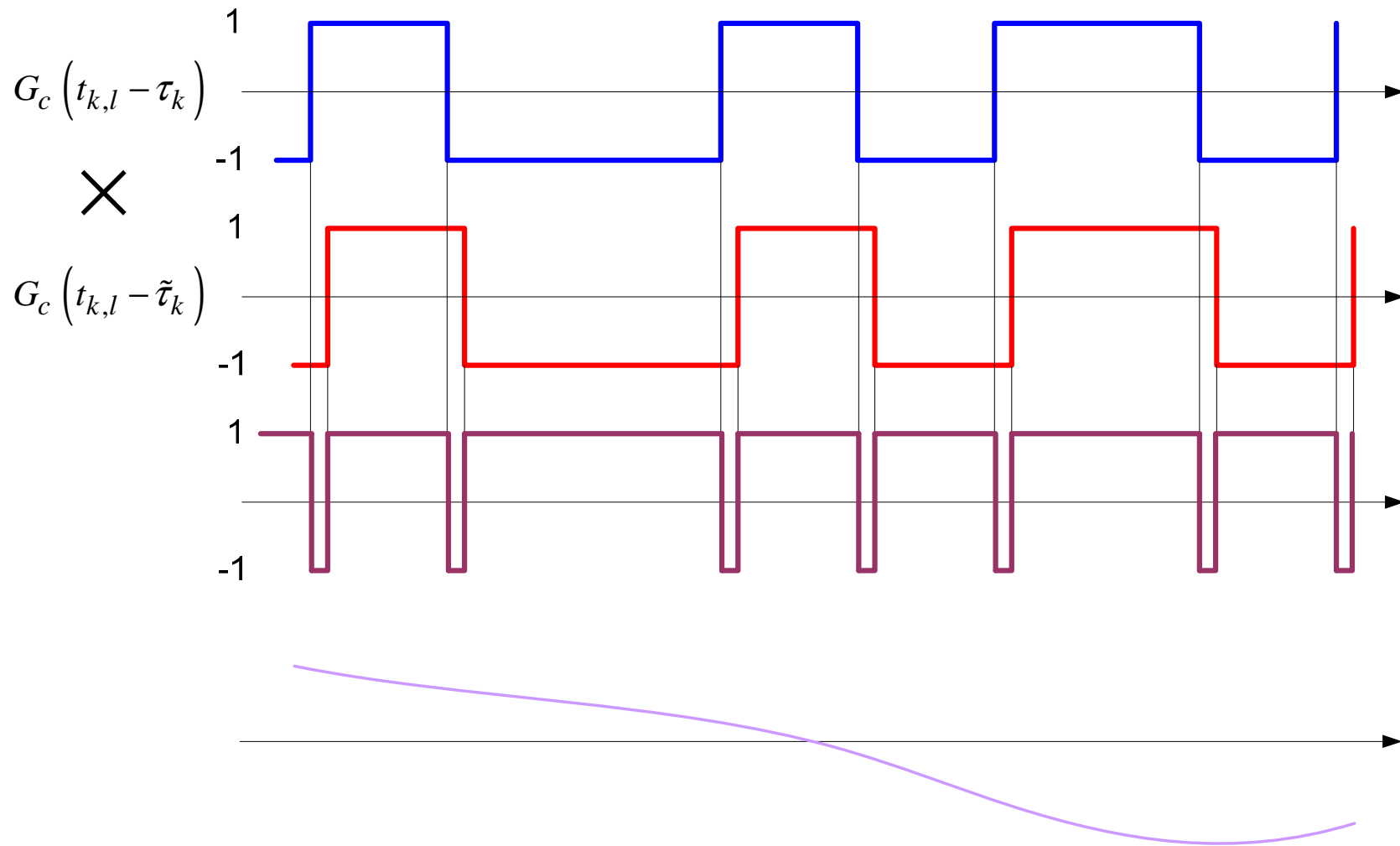
Расчет стат. эквивалентов



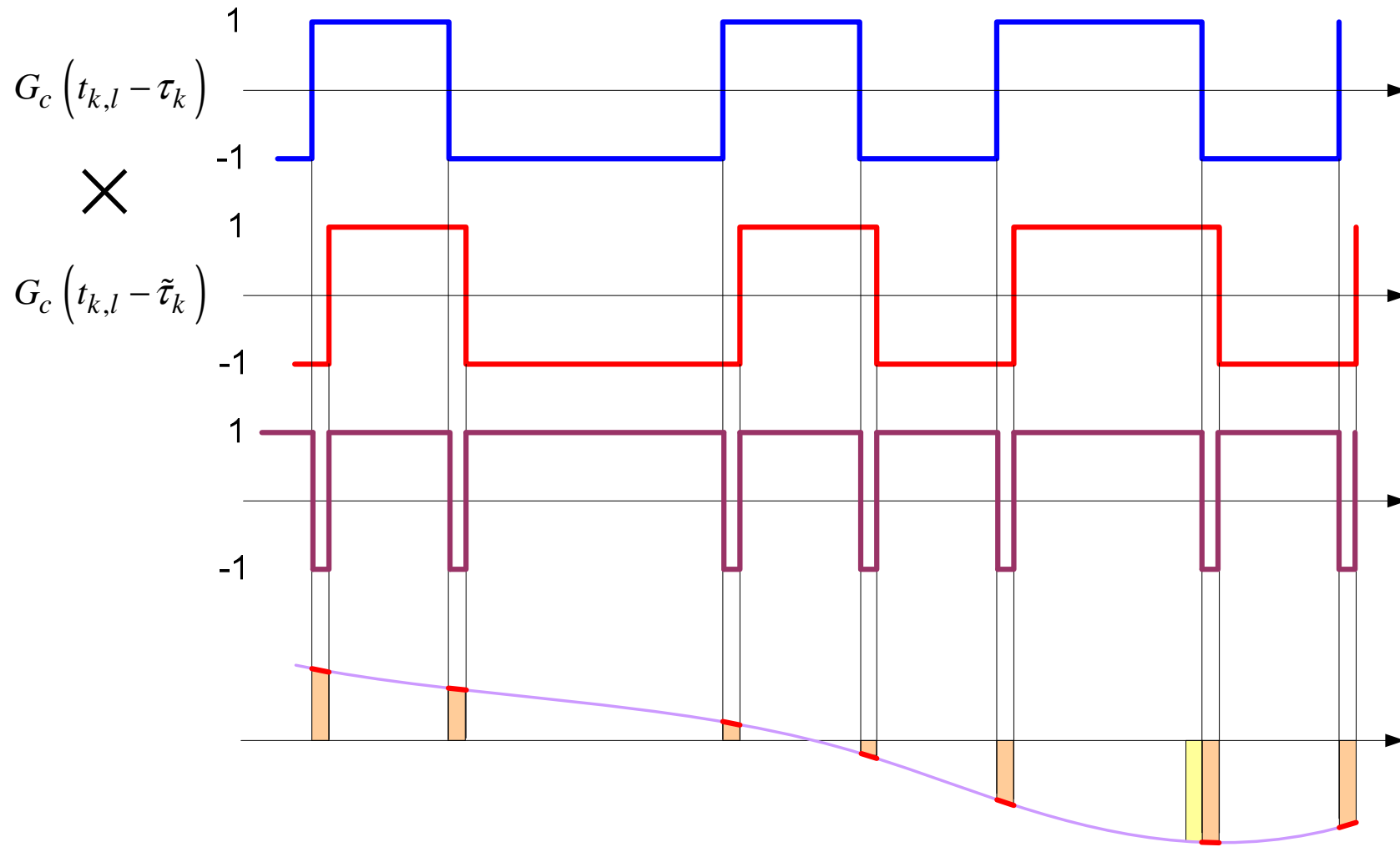
Расчет стат. эквивалентов



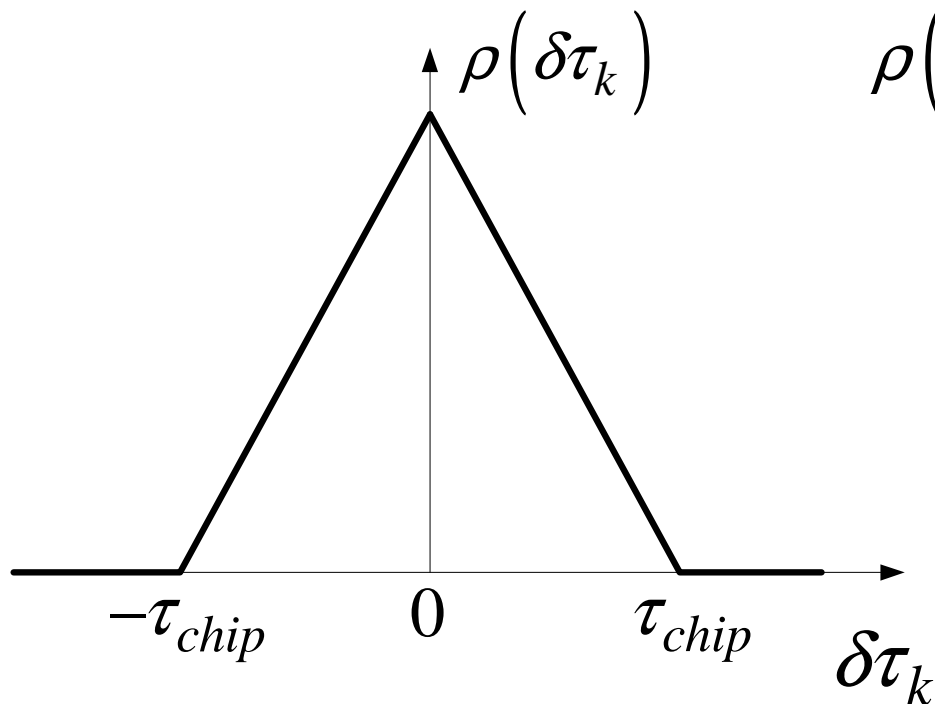
Расчет стат. эквивалентов



Расчет стат. эквивалентов



Корреляционная функция ДК



$$\rho(\delta\tau_k) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_k) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k)$$

$$\delta\tau_k = \tau_k - \tilde{\tau}_k$$

$$\bar{I}_k \approx \frac{1}{2} A G_{nd,k} \rho(\delta\tau_k) \sum_{l=1}^L \cos(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k)$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\sum_{l=1}^L \cos(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k) = \frac{1}{T_d} \sum_{l=1}^L \cos(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k) T_d \approx \frac{1}{T_d} \int_0^T \cos(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k) dt$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k) = \cos(\delta\omega_{d,k} t)\cos(\delta\varphi_k) - \sin(\delta\omega_{d,k} t)\sin(\delta\varphi_k)$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\begin{aligned}\cos(\delta\varphi_k) \int_0^T \cos(\delta\omega_{d,k}t) dt &= \\ &= \cos(\delta\varphi_k) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \sin(\delta\omega_{d,k}t) \Big|_0^T = \\ &= \cos(\delta\varphi_k) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \sin(\delta\omega_{d,k}T)\end{aligned}$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\begin{aligned}\sin(\delta\varphi_k) \int_0^T \sin(\delta\omega_{d,k}t) dt &= \\ &= -\sin(\delta\varphi_k) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \cos(\delta\omega_{d,k}t) \Big|_0^T = \\ &= -\sin(\delta\varphi_k) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} (\cos(\delta\omega_{d,k}T) - 1)\end{aligned}$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\int_0^T \cos(\delta\omega_{d,k}t + \delta\varphi_k) dt =$$
$$= \frac{\sin(\delta\omega_{d,k}T)\cos(\delta\varphi_k) + \cos(\delta\omega_{d,k}T)\sin(\delta\varphi_k) - \sin(\delta\varphi_k)}{\delta\omega_{d,k}}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\int_0^T \cos(\delta\omega_{d,k}t + \delta\varphi_k) dt = \frac{\sin(\delta\omega_{d,k}T + \delta\varphi_k) - \sin(\delta\varphi_k)}{\delta\omega_{d,k}}$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Расчет стат. эквивалентов

$$\int_0^T \cos(\delta\omega_{d,k}t + \delta\varphi_k) dt = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right) \cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)}{\delta\omega_{d,k}}$$

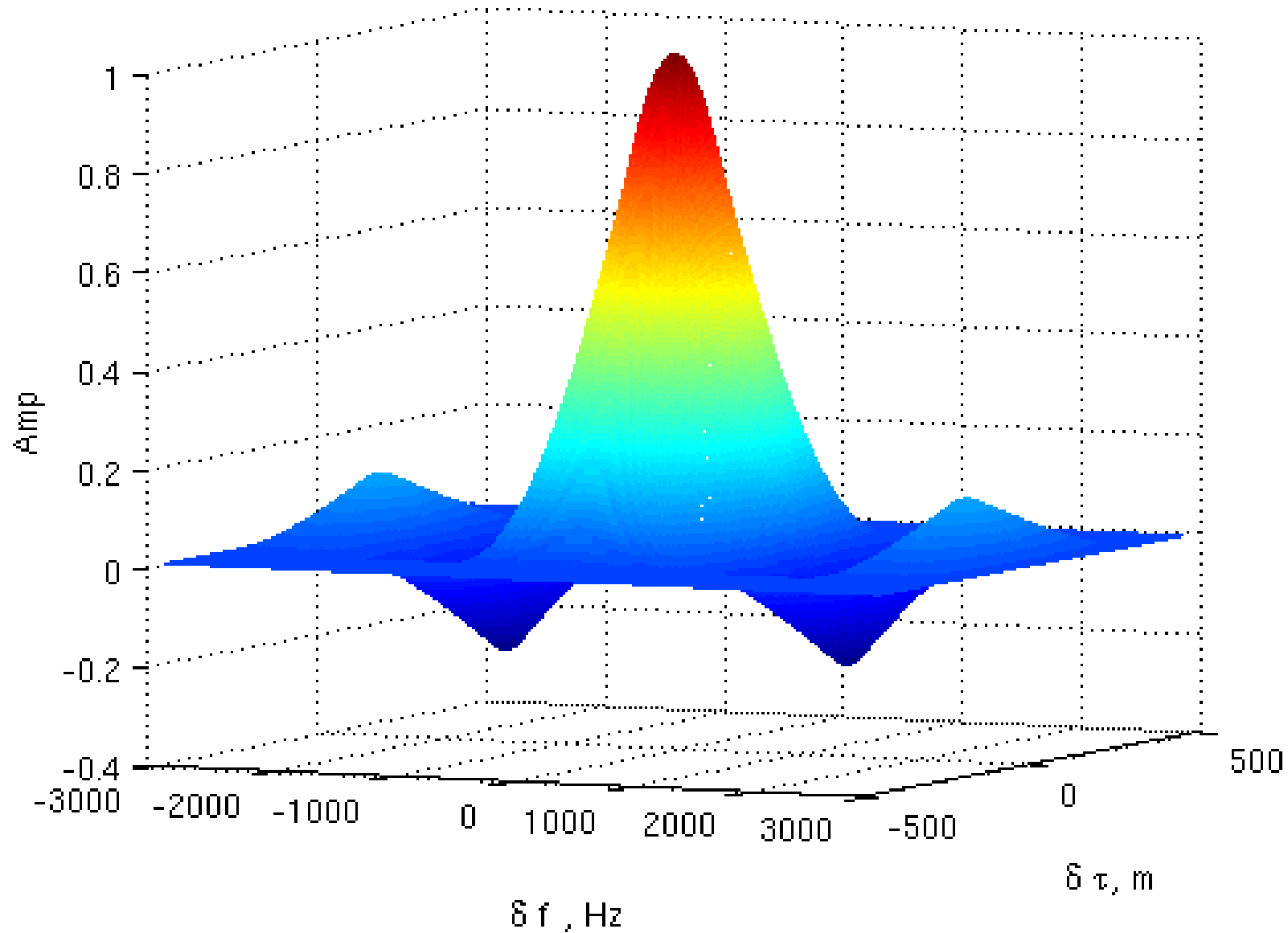
$$\bar{I}_k \approx \frac{1}{2} AG_{nd,k} \rho(\delta\tau_k) \frac{2 \sin\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right) \cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)}{\delta\omega_{d,k}T_d}$$

$$\bar{I}_k \approx \frac{AL}{2} G_{nd,k} \rho(\delta\tau_k) \frac{\sin\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right) \cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)}{\frac{\delta\omega_{d,k}T_d L}{2}}$$

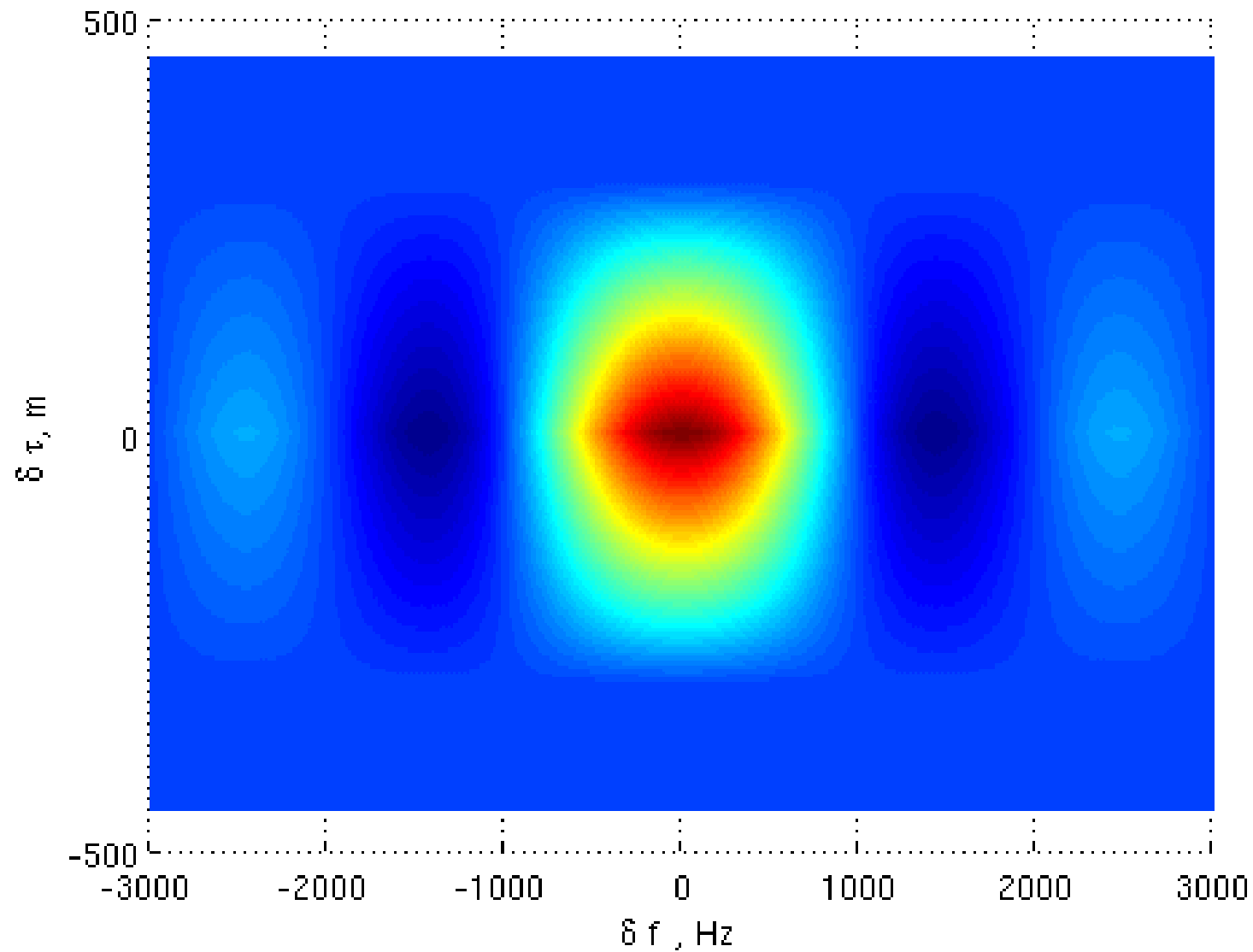
$$\bar{I}_k \approx \frac{AL}{2} G_{nd,k} \rho(\delta\tau_k) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right) \cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)$$

Расчет стат. эквивалентов

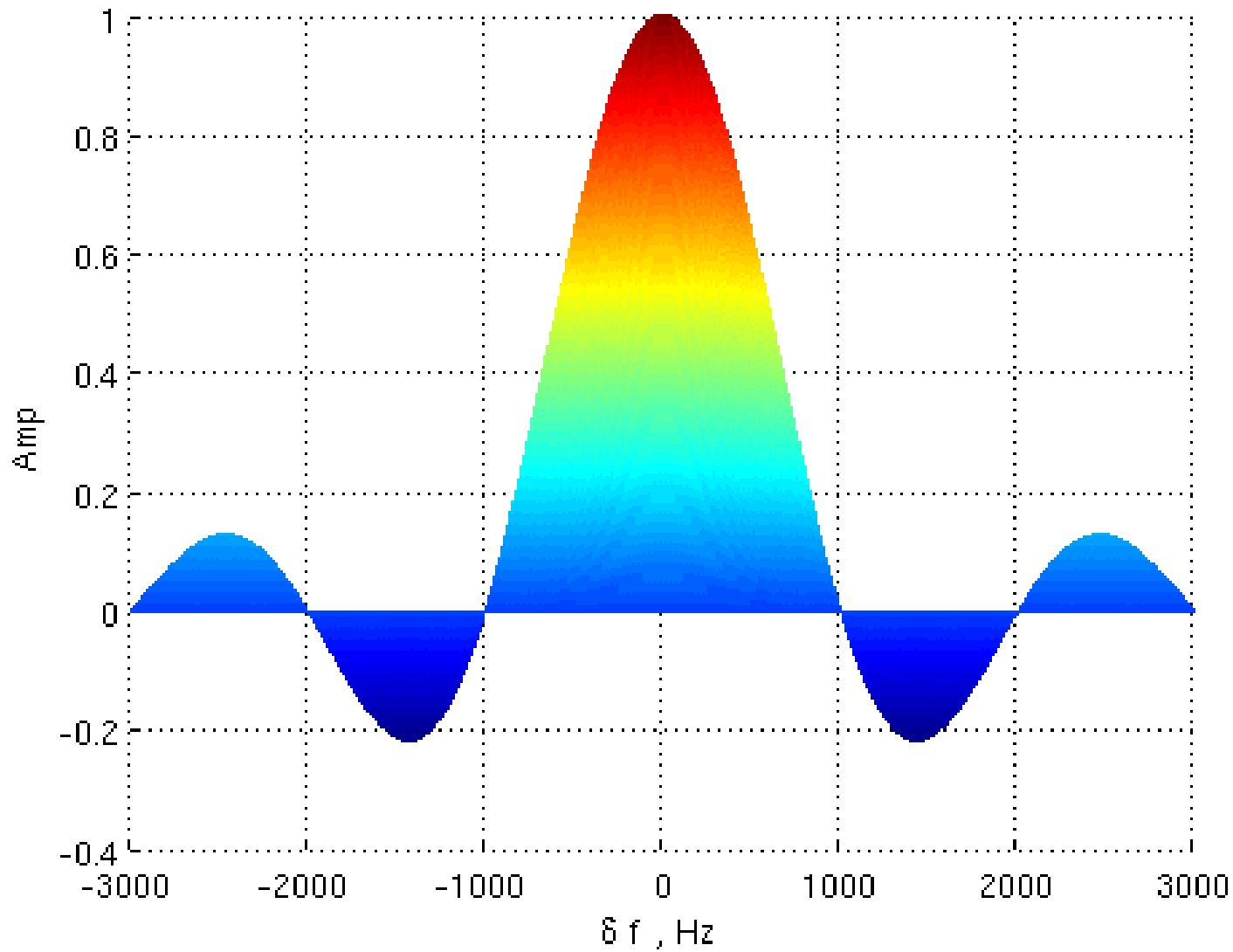
$$\rho(\delta\tau_k) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)$$



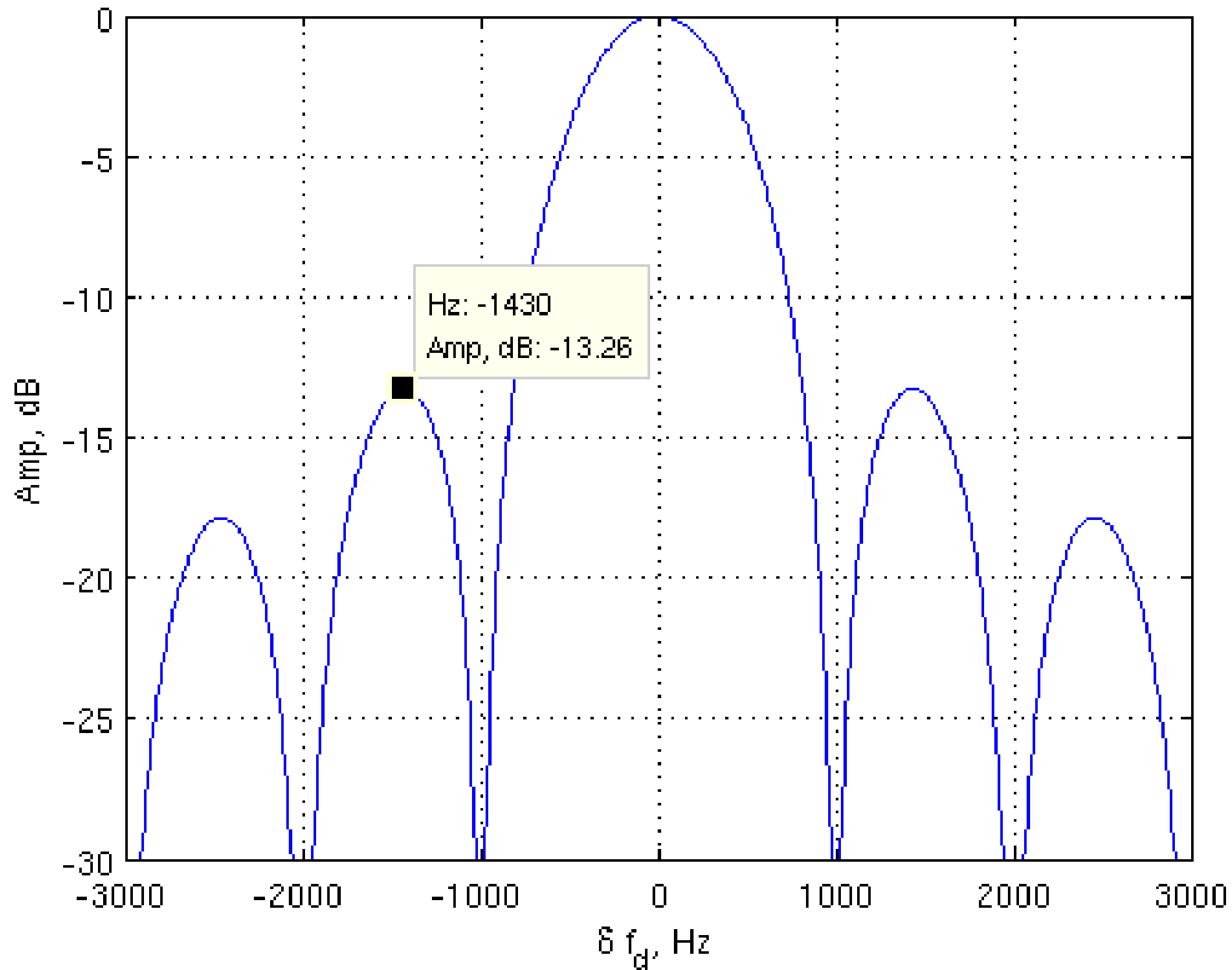
Расчет стат. эквивалентов



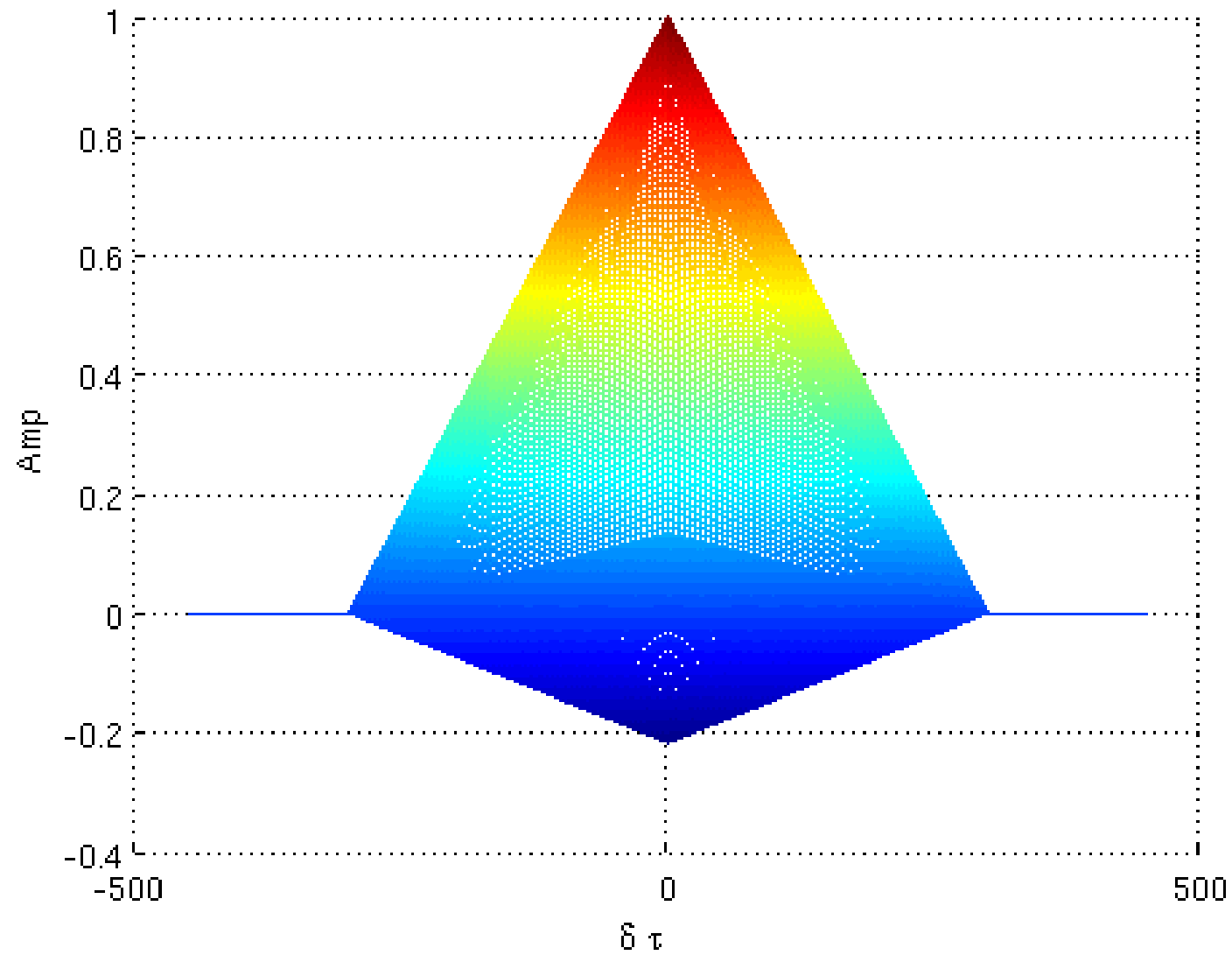
Расчет стат.эквивалентов



Расчет стат. эквивалентов



Расчет стат. эквивалентов



Квадратурная сумма

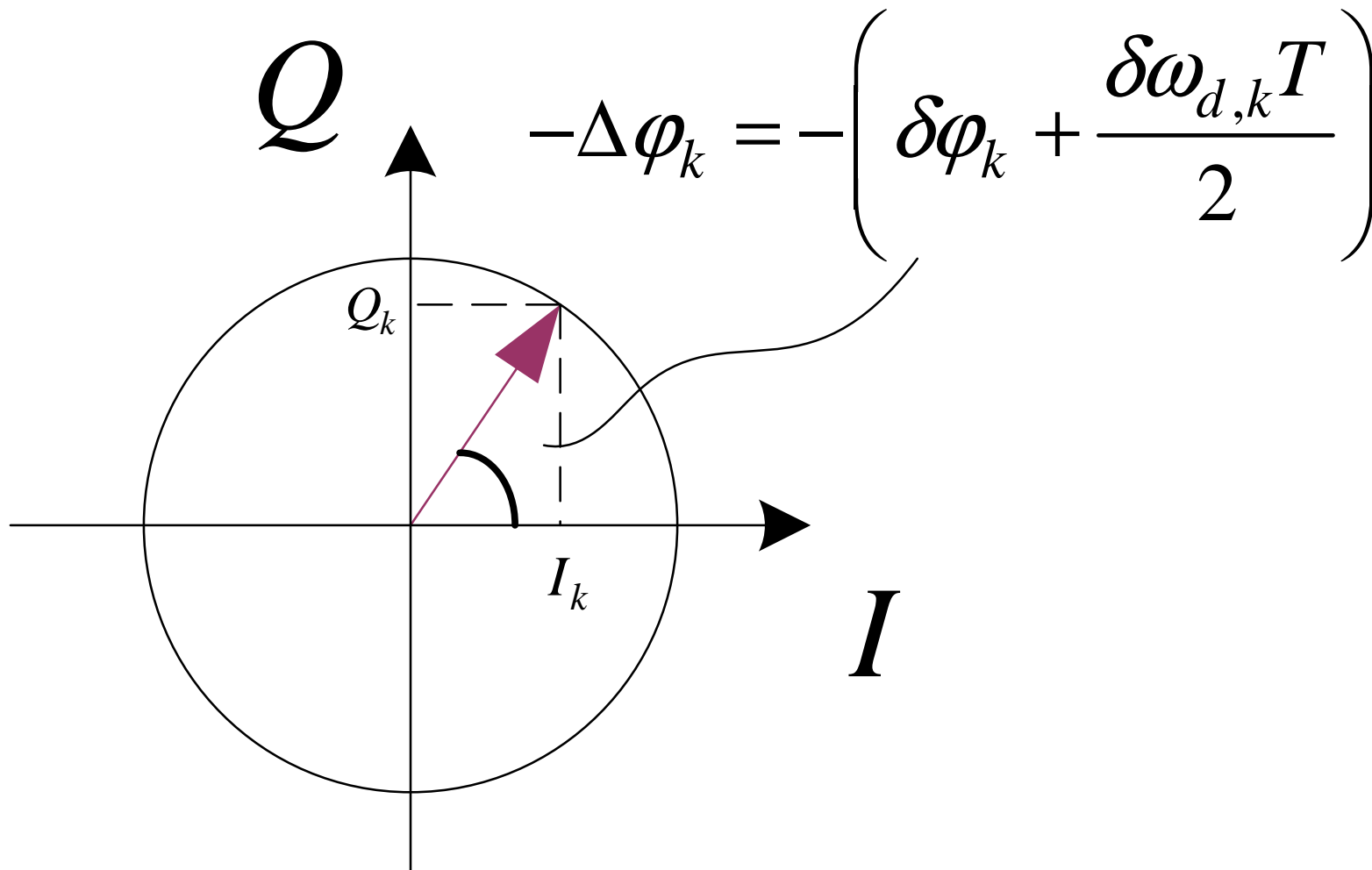
$$Q_k = \bar{Q}_k + n_{Q,k}$$

$$\bar{Q}_k \approx -\frac{AL}{2} G_{nd,k} \rho(\delta\tau_k) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right) \sin\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)$$

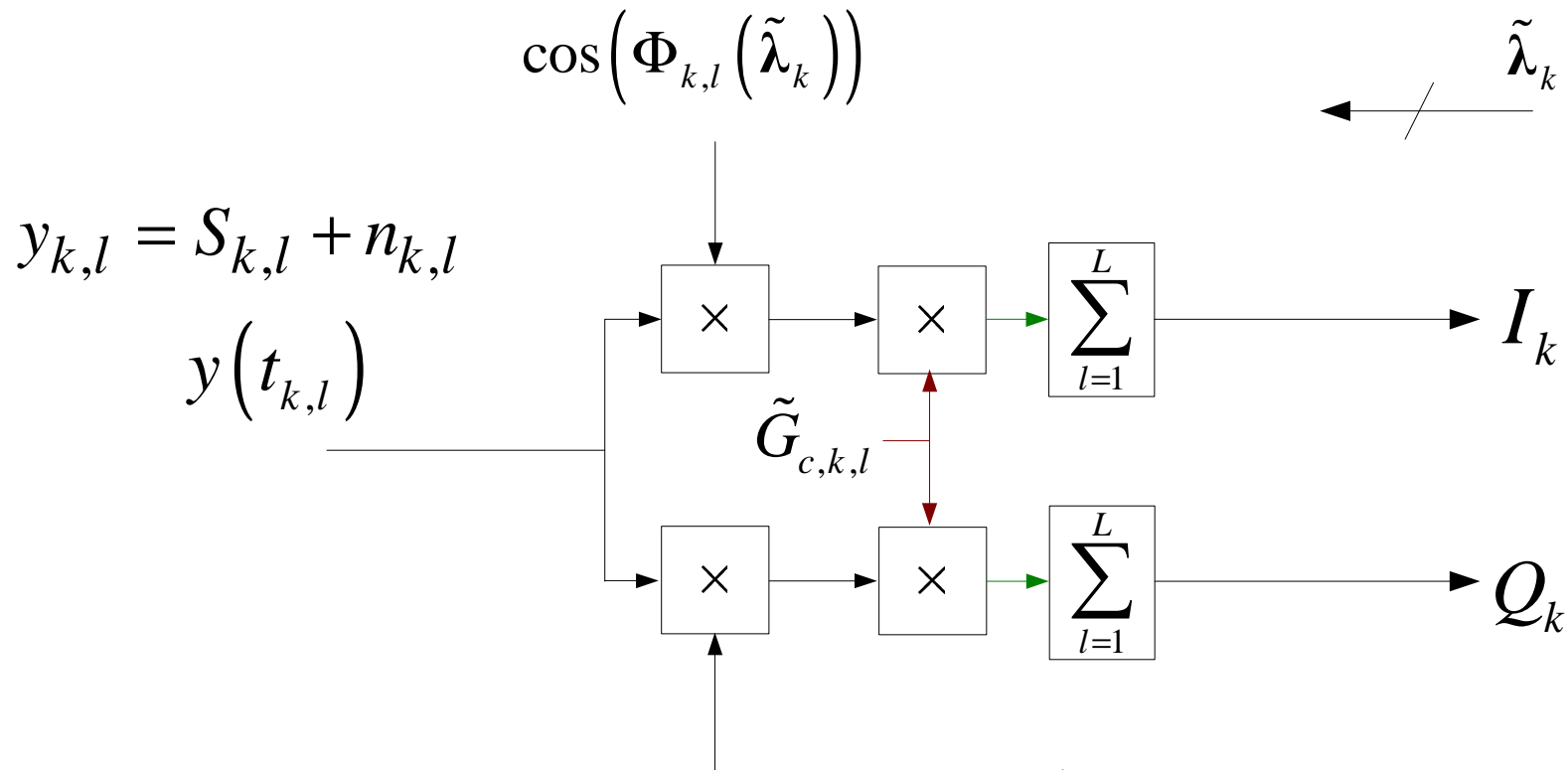
$$n_{Q,k} \sim N\left(0, \sigma_{IQ}^2\right)$$

$$\sigma_{IQ}^2 = \frac{\sigma_n^2 L}{2}$$

Квадратуры



Квадратуры



$$I_k = \bar{I}_k + n_{I,k}$$

$$Q_k = \bar{Q}_k + n_{Q,k}$$

Стат.эквивалент коррелятора

Реализация статистического эквивалента в MATLAB:

```
Tc = 0.001; % Интервал накопления в корреляторе, s
qcn0_dB = 45; % Отношение сигнал/шум, dBHz

stdn_IQ = 8; % СК0 шума квадратур
nI = stdn_IQ*randn(1,1); % // I-comp noise
nQ = stdn_IQ*randn(1,1); % // Q-comp noise

% EpsTau - расстройка по задержке
% EpsW - расстройка по частоте на начальный момент накопления
% EpsPhi - расстройка по фазе на начальный момент накопления

[A_IQ qcn0] = qcn0_change(qcn0_dB, stdn_IQ(k), Tc);
A_IQ_eff(k) = A_IQ(k)*sinc(EpsW*Tc/2 /pi)*ro(EpsTau);
mI = A_IQ_eff(k) * cos(EpsW*Tc/2 + EpsPhi);
mQ = - A_IQ_eff(k) * sin(EpsW*Tc/2 + EpsPhi);
I = mI + nI;
Q = mQ + nQ;
```

Стат.эквивалент коррелятора

Где функция qсно_change:

```
/**
%Расчет амплитуды квадратур для статистических эквивалентов
%@param qсно_dB - отношение qсно = Ps/No в дБГц
%@param stdn_IQ - СК0 шума квадратур
%@param Tc - интервал когерентного накопления
*/
function [A_IQ qсно] = qсно_change(qсно_dB, stdn_IQ, Tc)

qсно = 10.^(qсно_dB/10);
A_IQ = stdn_IQ .* sqrt(2 * qсно * Tc);

end
```

Функция ro:

```
/**
%Вычисление значения автокорреляционной функции ДК
%@param x - рассогласование по задержке в тех же единицах, в
которых задана глобальная переменная TauChip (длительность
одного чипа ДК)
*/
function f=ro(x)
    global TauChip
    f = (abs(x) < TauChip).*(1 - abs(x)/TauChip);
end
```

BER для BPSK

```
clear all; clc; close all;  
global TauChip; TauChip = 1;  
Tc = 0.02; % Интервал накопления, s  
qcn0_dB = 15:25; % SNR, dBHz  
stdn_IQ = 8; % СКО шума квадратур  
EpsW = 0; EpsTau = 0;  
Nexp = 1e7;  
bits = randn(1, Nexp) > 0;  
EpsPhi = bits * pi;  
nI = stdn_IQ*randn(1,Nexp);
```

```
for j = 1:length(qcn0_dB)  
    [A_IQ qcn0] = qcn0_change(qcn0_dB(j), stdn_IQ, Tc);  
    A_IQ_eff = A_IQ*sinc(EpsW*Tc/2 /pi)*ro(EpsTau);  
    mI = A_IQ_eff * cos(EpsW*Tc/2 + EpsPhi); I = mI + nI;
```

```
    bits_est = (I < 0);  
    BER(j) = sum(bits_est ~= bits) / Nexp;
```

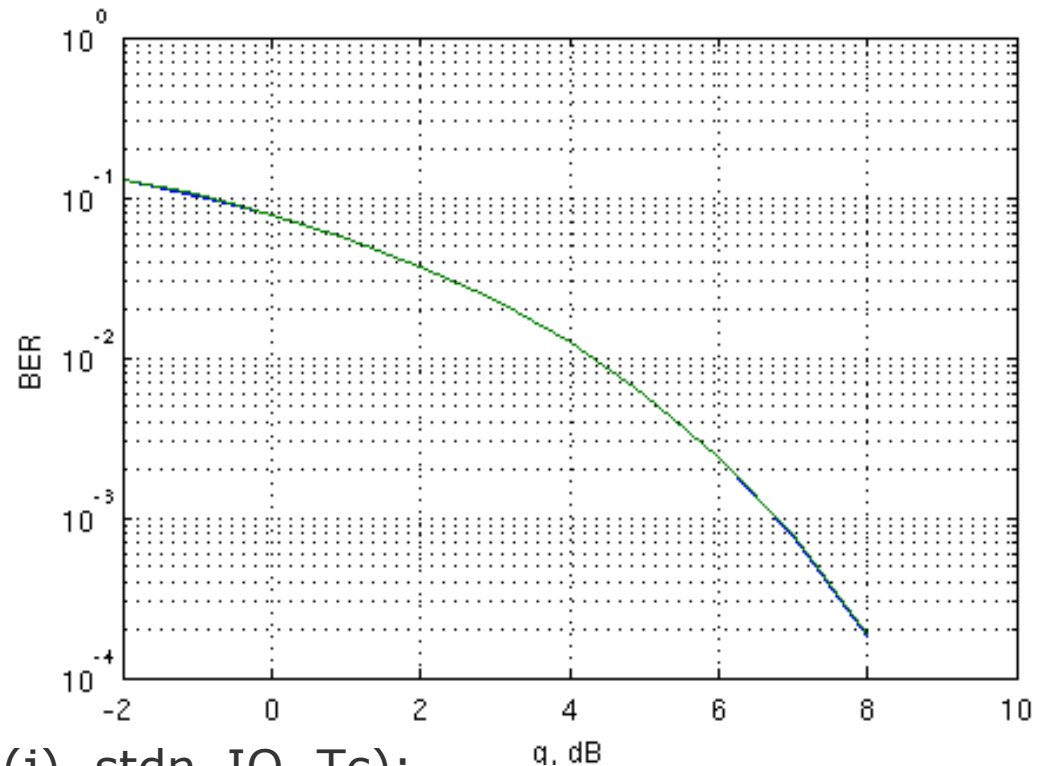
```
end
```

```
q = 10.^(qcn0_dB/10) * Tc; BER_teor = 0.5 * erfc(sqrt(q));
```

```
q_dB = 10*log10(q);
```

```
figure(1); semilogy(q_dB, BER, q_dB, BER_teor);
```

```
xlabel('q, dB'); ylabel('BER'); grid on;
```

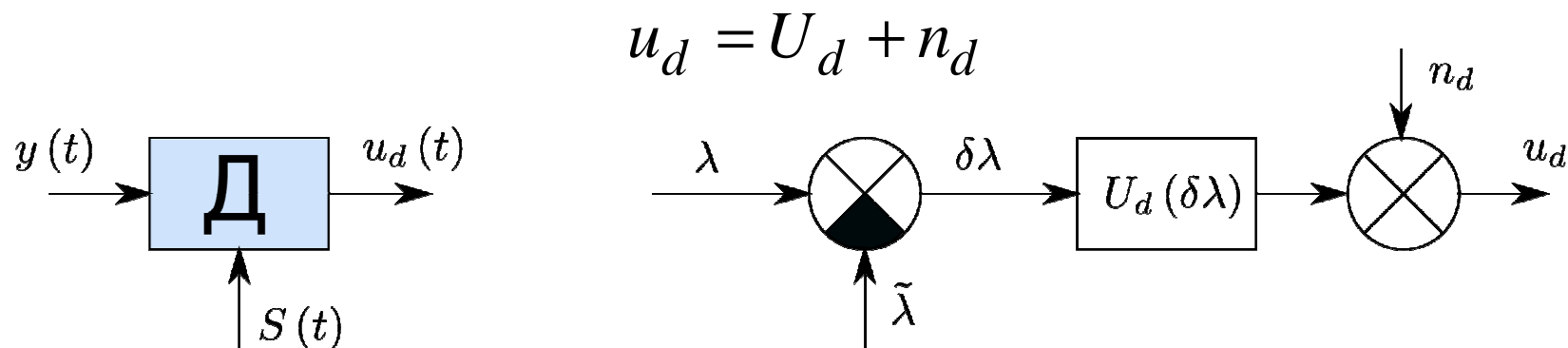


$$P_b = Q(\sqrt{2q}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{q})$$

Стат.эквивалент дискриминатора

Часто используют статистический эквивалент для **дискриминаторов**.

Выходной сигнал дискриминатора представляют как сумму



$$U_d = M[u_d] = U_d(\lambda - \tilde{\lambda}) - \text{дискриминационная характеристика,}$$

(если параметров несколько, ошибку по остальным приравнивают нулю)

n_d - шум с дисперсией D_η , D_η - **флуктуационная характеристика**

В большинстве случаев шум n_d белый.

Его плотность вероятности аппроксимируют нормальным законом,
а выборку получают с помощью randn()

Фазовый дискриминатор

Самый простой пример – фазовый дискриминатор вида

$$u_{d,\varphi} = -Q$$

Для него мы уже всё посчитали:

$$U_{d,\varphi} = M[u_d] = -\bar{Q} = \frac{AL}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\omega T}{2} + \delta\varphi\right) = \frac{AL}{2} \sin(\delta\varphi)$$

$$n_d = -n_I \sim N\left(0, \frac{\sigma_n^2 L}{2}\right), \quad D_{\eta,\varphi} = \frac{\sigma_n^2 L}{2}$$

